Algebra
WS 02/03

Dr. Urs Hartl
Immanuel Herrmann

6. Übungsblatt

Abgabetermin: Mo, 25.11.02, 16:15 Uhr, vor Beginn der Vorlesung

1. Sei R ein kommutativer Ring und $r \in R$ ein Element. Zeigen Sie: Das von r erzeugte Ideal (r) ist genau dann ganz R, wenn $r \in R^\times$ ist. *(3 Punkte)*

2. Betrachten Sie den folgenden Isomorphismus, den man aus dem chinesischen Restsatz (Satz 2.2.12) bekommt:

$$\mathbb{Z}/60\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}.$$

   (a) Finden Sie Urbilder von $(\bar{1}, \bar{0}, \bar{0})$, $(\bar{0}, \bar{1}, \bar{0})$ und $(\bar{0}, \bar{0}, \bar{1})$. (Hinweis: Beim Beweis des chinesischen Restsatzes in der Vorlesung wurden diese Urbilder konstruiert.)

   (b) Finden Sie das Urbild von $(\bar{1}, \bar{2}, \bar{4})$

   (5 Punkte)

3. Betrachten Sie die Teilmenge $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) := \{a + \sqrt{2}b \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ von $\mathbb{R}$.

   (a) Zeigen Sie: $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ist der kleinste Unterring von $\mathbb{R}$, der $\mathbb{Q}$ und $\sqrt{2}$ enthält.

   (b) Ist $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ein Körper?

   (5 Punkte)

4. Sei R der Ring der stetigen Funktionen $[0,1] \to \mathbb{R}$ mit punktweiser Addition und Multiplikation. Zeigen Sie:

   (a) Ist $A \subset [0,1]$ eine abgeschlossene Teilmenge, so ist die Menge der Funktionen $I(A) := \{f \in R \mid \forall x \in A\colon f(x) = 0\}$ ein Ideal in R.

   (b) Ist J ein Ideal in R, so ist $V(J) := \{x \in [0,1] \mid \forall f \in J\colon f(x) = 0\}$ eine abgeschlosse Teilmenge von $[0,1]$.

   (c) Für $A \subset [0,1]$ abgeschlossen ist $V(I(A)) = A$.
   Hinweis zu „$\subset$“: Wählen Sie einen Punkt $x \notin A$ und konstruieren Sie eine Funktion, die auf A null ist, aber nicht bei x.

   (d) Für ein Ideal $J \subset R$ ist $I(V(J)) \supset J$.
   Anmerkung: Im Allgemeinen ist $I(V(J))$ echt größer als J.

   (7 Punkte)