Algebra
WS 02/03

Dr. Urs Hartl
Immanuel Herrmann

7. Übungsblatt

Abgabetermin: Mo, 2.12.02, 16:15 Uhr, vor Beginn der Vorlesung

1. Sei R ein kommutativer Ring. Zeigen Sie, dass die Ringe $R[X][Y]$ und $R[Y][X]$ „gleich“ sind, d. h. jedes Element $f = \sum_{i=0}^{\infty} a_i Y^i \in R[X][Y]$ mit $a_i \in R[X]$ lässt sich eindeutig schreiben als $f = \sum_{i=0}^{\infty} b_i X^i$ mit $b_i \in R[Y]$. (Wenn Sie die Folgerung nach Def. 2.4.17 aus der Vorlesung dazu verwenden wollen, sollen Sie auch diese Folgerung zeigen.)

   Anmerkung: Für $R[X][Y]$ schreibt man auch $R[X,Y]$; diese Aufgabe zeigt, dass dabei die Reihenfolge der Variablen egal ist. *(3 Punkte)*

2. Sei K ein Körper. Zeigen Sie im Ring $K[X,Y]$:

   (a) Die Ideale (X) und (Y) sind Primideale, aber nicht maximal.

   (b) Das Ideal (X,Y) ist kein Hauptideal.

   Anmerkung: Dies ist ein „Beispiel“ zu Satz 2.5.7 aus der Vorlesung: Es gibt nicht-maximale Primideale, also ist der Ring kein Hauptidealring. *(6 Punkte)*

3. Der Euklidische Algorithmus im Polynomring $\mathbb{Q}[X]$: Seien $f_1 := 3X^3+11X^2-4$ und $f_2 := X^4 + 4X^3 - 5X + 2$. Berechnen Sie $g := \mathrm{ggT}(f_1, f_2)$ und geben Sie Polynome $h_1, h_2 \in \mathbb{Q}[X]$ an mit $g = h_1 \cdot f_1 + h_2 \cdot f_2$. *(4 Punkte)*

4. Sei R der Ring der stetigen Funktionen $[0,1] \to \mathbb{R}$ mit punktweiser Addition und Multiplikation. Auf dem letzten Blatt haben Sie eine Beziehung zwischen den Idealen in R und den abgeschlossenen Teilmengen von $[0,1]$ hergestellt. Diesmal sollen die maximalen Ideale und die „minimalen abgeschlossenen Teilmengen“, d. h. ein-Punkt-Mengen betrachtet werden. Zeigen Sie also:

   (a) Ist $x \in [0,1]$, so ist $I(x) := \{f \in R \mid f(x) = 0\}$ ein maximales Ideal in R.

   (b) Ist J ein (beliebiges) Ideal in R mit $J \neq R$, so gibt es einen Punkt $x \in [0,1]$ mit $f(x) = 0$ für alle $f \in J$.

   Hinweis: Zeigen Sie: Wenn es keinen solchen Punkt gibt, muss J schon eine Einheit enthalten und damit ganz R sein. Überlegen Sie sich dazu zuerst, was die Einheiten in R sind. Die Einheit in J bekommen Sie dann folgendermaßen: Finden Sie zu jedem Punkt x eine Funktion $f_x \in J$, die bei x den Wert 1 hat. Zeigen Sie, dass die Funktion auf einem ganzen offenen Intervall U_x um x nicht 0 ist. Nutzen Sie die Kompaktheit des Intervalls $[0,1]$ aus, um eine endliche Teilmenge der x zu finden, so dass die zugehörigen U_x schon das ganze Intervall $[0,1]$ überdecken. Zeigen Sie dann, dass die Summe der Quadrate der entsprechenden f_x in J liegt und eine Einheit ist.

   (c) Ist J ein maximales Ideal in R, so gibt es einen Punkt $x \in [0,1]$ mit $J = I(x)$. *(7 Punkte)*