Algebra
WS 02/03

Dr. Urs Hartl
Immanuel Herrmann

8. Übungsblatt

Abgabetermin: Mo, 9.12.02, 16:15 Uhr, vor Beginn der Vorlesung

1. Betrachten Sie den *Ring der ganzen Gauß'schen Zahlen* $\mathbb{Z}[i] = \mathbb{Z} + \mathbb{Z} \cdot i \subset \mathbb{C}$. Zeigen Sie:

   (a) Mit der Größenfunktion $\delta(x) := |x|^2 = x\,\overline{x}$ für $x \in \mathbb{Z}[i]$ ist $\mathbb{Z}[i]$ ein euklidischer Ring.
   Hinweis: Veranschaulichen Sie sich die ganzen Gauß'schen Zahlen als Punkte in der komplexen ebene und zeigen Sie, dass zu allen $a, b \in \mathbb{Z}[i]$ ein $q \in \mathbb{Z}[i]$ existiert mit $\delta(\frac{a}{b} - q) < 1$.

   (b) Es ist $\delta(a) \cdot \delta(b) = \delta(ab)$ für alle $a, b \in \mathbb{Z}[i]$.

   (c) Berechnen Sie den ggT von $5 + i$ und $1 + 3i$ in $\mathbb{Z}[i]$.

   (d) Bestimmen Sie die Zerlegung von 2 in ein Produkt irreduzibler Elemente von $\mathbb{Z}[i]$.

   (e) Bestimmen Sie die Einheiten von $\mathbb{Z}[i]$. *(7 Punkte)*

2. Sei K ein Körper und $S = K[X, Y]$. Sei $Z := XY \in S$ und betrachten Sie den Polynomring $R = K[X, Z] \subset S$ als Unterring. Zeigen Sie: 1 ist ggT von X und Z in R aber nicht in S.
   Anmerkung: Dies ist ein „Beispiel" zu Korollar 2.6.6 der Vorlesung. *(4 Punkte)*

3. Seien $f, g \in \mathbb{Z}[X]$. Zeigen Sie, dass f und g genau dann in $\mathbb{Q}[X]$ teilerfrend sind, wenn das Ideal $(f, g) \subset \mathbb{Z}[X]$ eine ganze Zahl ungleich 0 enthält. *(3 Punkte)*

4. Sei $p \in \mathbb{Z}$ eine Primzahl und $\mathbb{Z}_p := \{\frac{a}{b} \ : \ a, b \in \mathbb{Z} \text{ mit } p \nmid b\}$. Zeigen Sie:

   (a) $\mathbb{Z}_p$ ist ein Unterring von $\mathbb{Q}$ und somit ein Integritätsbereich.

   (b) $\mathbb{Z}_p$ ist mit $\delta(a/b) := v_p(a) := \max\{n \in \mathbb{N}_0 : p^n | a \text{ in } \mathbb{Z}\}$ ein euklidischer Ring.

   (c) Die Einheitengruppe von $\mathbb{Z}_p$ ist $\{\frac{a}{b} \ : \ a, b \in \mathbb{Z} \text{ mit } p \nmid a, b\}$.

   (d) p ist Primelement von $\mathbb{Z}_p$ und jedes Primelement von $\mathbb{Z}_p$ ist zu p assoziiert.

   (6 Punkte)