Algebra
WS 02/03

Dr. Urs Hartl
Immanuel Herrmann

9. Übungsblatt

Abgabetermin: Mo, 16.12.02, 16:15 Uhr, vor Beginn der Vorlesung

1. Sei K ein Körper und $f \in K[X]$ ein Polynom mit $\deg f = 2$ oder $\deg f = 3$. Zeigen Sie: f ist genau dann irreduzibel, wenn f keine Nullstelle in K hat. *(4 Punkte)*

2. Zeigen Sie, dass die folgenden Polynome in $\mathbb{Q}[X]$ irreduzibel sind.

   (a) $X^2 - 2345X + 125$,

   (b) $X^3 - 51X^2 + 27X + 213$,

   (c) $X^5 + 21X^4 + 28X^3 - 126X^2 + 84X - 42$,

   (d) $X^3 + 2X^2 + 3X + 1$.

   (4 Punkte)

3. Sei K ein Körper der Charakteristik $p \neq 0$. Die Frobenius-Abbildung $\mathrm{Frob}_p \colon K \to K$ ist definiert durch $\mathrm{Frob}_p(x) := x^p$. Zeigen Sie:

   (a) Frob_p ist ein Ringhomomorphismus.

   (b) Die Elemente von K, die von der Frobenius-Abbildung festgehalten werden, sind genau die Elemente von $\mathbb{F}_p$ (also $\{x \in K \mid \mathrm{Frob}_p(x) = x\} = \mathbb{F}_p$). Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass jedes Element von $\mathbb{F}_p$ festgehalten wird, indem sie die Ordnung multiplikative Gruppe von $\mathbb{F}_p$ anschauen. Betrachten Sie für die andere Inklusion das Polynom $x^p - x$ und seine Nullstellen.

   (5 Punkte)

4. Seien $K \subset L$ Körper mit $[L : K]$ prim. Zeigen Sie: Für alle Elemente $\alpha \in L \smallsetminus K$ gilt $L = K(\alpha)$. *(3 Punkte)*

5. Seien $K \subset L$ Körper mit $[L : K] = 2^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$, und sei $f \in K[X]$ ein Polynom vom Grad 3. Zeigen Sie: Wenn f eine Nullstelle in L hat, dann hat f auch schon eine Nullstelle in K. *(4 Punkte)*