Algebraische Geometrie
SoSe 2003

Dr. Urs Hartl
Immanuel Herrmann

Anwesenheitsaufgaben

1. Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper. Seien $a_1, \dots, a_n \in k$, und sei $I := (X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n) \subset R := k[X_1, \dots, X_n]$.

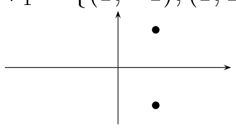
   (a) Wie sieht $V(I) \subset \mathbb{A}^n(k)$ aus?

   (b) Zeigen Sie, dass I ein maximales Ideal ist, falls $a_i = 0$ für alle i.
   Hinweis: In diesem Fall besteht das Ideal genau aus den Polynomen ohne konstanten Term. Was ist das Erzeugnis von I und einem weiteren Polynom?

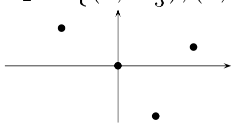
   (c) Zeigen Sie, dass I immer ein maximales Ideal ist (auch, wenn die a_i nicht null sind).
   Hinweis: Geben Sie einen Automorphismus von R an, der I auf das Ideal aus Teil (b) abbildet.

2. Welche der folgenden Mengen sind algebraisch? Was sind ggf. die irreduziblen Komponenten? Geben Sie ein Ideal I an mit $V(I) = V_i$. Gilt $I = V_i$?

   (a) $V_1 = \{(1, -1), (1, 1)\} \subset \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$

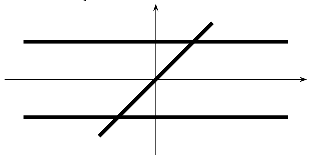
   

   (b) $V_2 = \left\{(1, -\frac{4}{3}), (0, 0), (-\frac{3}{2}, 1), (2, \frac{1}{2})\right\} \subset \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$

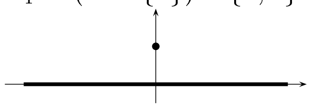
   

   Überlegen Sie sich, ob Sie bei dieser Teilaufgabe $I(V_2)$ wirklich explizit (durch Erzeuger) angegeben wollen, oder lieber nur als Schnitt von mehreren Idealen.

   (c) $V_3 = \left\{(x, y) \in \mathbb{A}^2(\mathbb{C}) \mid y = \pm 1 \vee y = x\right\}$

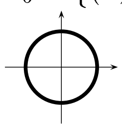
   

   (d) $V_4 = (\mathbb{C} \times \{0\}) \cup \{0, 1\}$

   (e) $V_5 = \mathbb{Z} \subset \mathbb{A}^1(\mathbb{C})$

   (f) $V_6 = \left\{(x, y) \in \mathbb{A}^2(\mathbb{C}) \mid x^2 + y^2 = 1\right\}$

   (g) $V_7 = \left\{(x, y) \in \mathbb{A}^2(\mathbb{C}) \mid x^2 + y^2 \leq 1\right\}$