Algebraische Geometrie
SoSe 2003

Dr. Urs Hartl
Immanuel Herrmann

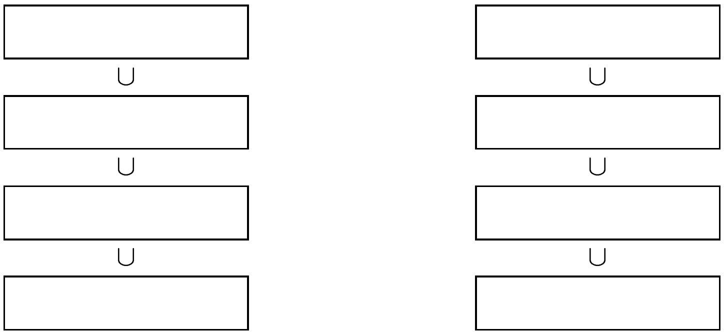
# Anwesenheitsaufgaben

1. Vervollständigen Sie das nachfolgende Diagramm:

   In der linke Spalte soll stehen (in geeigneter Reihenfolge): „Algebraische Mengen", „Varietäten", „Teilmengen von $\mathbb{A}^n$" und „Ein-Elementige Teilmengen von $\mathbb{A}^n$".

   In der rechten Spalte soll stehen: „Ideale", „Maximale Ideale", „Primideale" und „Radikal-Ideale".

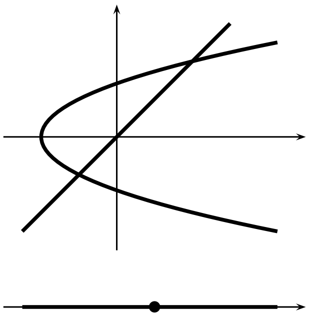
   Zeichnen Sie die Abbildungen $I(\cdot)$ und $V(\cdot)$ an allen Stellen ein, wo es Sinn macht. Geben Sie auch an, wo diese Abbildungen injektiv oder surjektiv sind, und wann Sie genau invers zueinander sind.



2. Führen Sie „Going-up" (im Skript: Satz D.2a) am folgenden Beispiel durch:

   Sei $I := ((Y^2 - 2 - X)(X - Y)) \subset \mathbb{C}[X, Y]$, $S := \mathbb{C}[X, Y]/I$, $\mathfrak{a} := (Y^2 - 2 - X) \subset S$, $R := \mathbb{C}[X] \subset S$ und $\mathfrak{p} := (X - 1) \subset R$.

   (a) Was wird in dem nachfolgenden Bild dargestellt? Wie kann man das Ideal $\mathfrak{a}$ darstellen?



   (b) Sind die Voraussetungen für Going-up erfüllt? Berechnen Sie $\mathfrak{a} \cap R$. Was bedeutet das geometrisch?

   (c) Bei Going-up ist ein Ideal $\mathfrak{q}$ von $S$ gesucht, dass $\mathfrak{p}$ enthält. Sei $\mathfrak{p}'$ das Ideal-Erzeugnis von $\mathfrak{p}$ in $S$. Was kann man über die Beziehung zwischen $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{p}'$ sagen?

   (d) $\mathfrak{p}'$ kann man sich nicht so recht vorstellen, und in $S$ rechnen ist auch nicht anschaulich. Aber es gibt eine Entsprechung zwischen Idealen von $S$ und gewissen Idealen von $\mathbb{C}[X, Y]$ (siehe Skript, Aufg, 1-22). Was ist das Ideal von $\mathbb{C}[X, Y]$, dass $\mathfrak{p}'$ entspricht? Zeichnen sie die zugehörige Menge im Bild ein.

   (e) Bei Going-up ist gefordert, dass $\mathfrak{q}$ irreduzibel ist. Welche Ideale kommen dafür noch in Frage, unter Berücksichtigung der Beziehung aus (c)? Welche dieser Ideale erfüllen auch die Bedinung, $\mathfrak{a}$ zu enthalten?