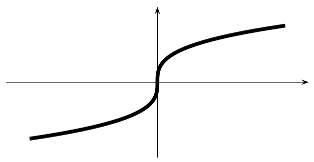
Algebraische Geometrie
SoSe 2003 | Dr. Urs Hartl
Immanuel Herrmann

Anwesenheitsaufgaben

1. Sei $V := V(X - Y^3) \subset \mathbb{A}^2$, $p := (0,0) \in V$ und $U := V \setminus \{p\}$. Was für Funktionen liegen in den Ringen $\Gamma(V), k(V), \mathcal{O}_{V,p}, \Gamma(U)$? (Wo sind die Funktionen definiert, wo dürfen Polstellen sein?) Welche Ringe sind ineinander enthalten?



   Welche der nachfolgenden Funktionen liegen in welchen der vier Ringe? (Genauer: ... können aufgefasst werden als Elemente von ...)

   Zwei der Funktionen sind gleich (wenn man sie als Elemente von $k(V)$ auffasst). Welche?

   (a) $f_1 = X$
   (b) $f_2 = Y^2$
   (c) $f_3 = \sin(X)$
   (d) $f_4 = \frac{1}{(X+1)(Y+2)}$
   (e) $f_5 = \frac{1}{X-Y^3}$
   (f) $f_6 = \frac{1}{1-X+Y^3}$
   (g) $f_7 = \frac{X}{Y}$
   (h) $f_8 = \frac{Y}{X}$

2. (a) Sei $\phi \in k[X]$ ein Polynom und $G(\phi) := \{(a,b) \in \mathbb{A}^2 \mid b = \phi(a)\}$ der Graph von ϕ. Überlegen Sie sich zunächst, dass $G(\phi)$ eine Varietät ist. (Geben Sie das zugehörige Ideal in $k[X,Y]$ an.)

   Zeigen Sie dann, dass $G(\phi)$ isomorph zu $\mathbb{A}^1$ ist, indem sie Morphismen in beide Richtungen angeben, die invers zueinander sind. (Wenn Sie keine Ideen haben, was die Morphismen sein könnten, malen Sie z. B. $G(X^2)$, und darunter waagrecht $\mathbb{A}^1$. Was wären naheliegende Morhpismen?)

   (b) Verallgemeinern Sie das auf den Fall, dass $\phi \in k[X_1, \dots X_n]$ liegt.

   (c) Das lässt sich noch weiter verallgemeinern: Sei $V \subset \mathbb{A}^n$ eine Varietät, und sei $\phi \in \Gamma(V)$. Überlegen Sie sich, dass

   $$G(\phi) := \{(a_1, \dots, a_n, b) \in \mathbb{A}^{n+1} \mid (a_1, \dots, a_n) \in V \text{ und } b = \phi(a_1, \dots, a_n)\}$$

   eine sinnvolle Definition für den Graph von ϕ ist, und zeigen Sie wieder die Isomorphie von V und $G(\phi)$.