Algebraische Geometrie
SoSe 2003

Dr. Urs Hartl
Immanuel Herrmann

Anwesenheitsaufgaben

1. Betrachten Sie im $\mathbb{A}^2$ die Spiegelung and der Y-Achse und die Punktspiegelung am Ursprung. Sind diese Abbildungen algebraisch? Wie sehen die zugehörigen Abbildungen des Koordinatenrings $k[X,Y]$ aus? Welche Elemente von $k[X,Y]$ werden von den Abbildungen festgehalten? Was bedeutet das für die zugehörigen Varietäten?

2. In dieser Aussage soll ein lokaler Ring mal genauer unter die Lupe genommen werden.
   (a) Sei $V := V(Y) \subset \mathbb{A}^2$ die X-Achse, und sei $P := (0,0) \in V$ der Ursprung. Wie sehen die Ringe $\Gamma(V)$, $k(V)$, $\mathcal{O} := \mathcal{O}_{V,P}$ und der Quotientenkörper $\mathrm{Quot}(\mathcal{O})$ aus? (Wie sehen die Elemente dieser Ringe aus?)
   (b) Wie sehen die Elemente des maximalen Ideals $\mathfrak{m} := \mathfrak{m}_{P(V)} \subset \mathcal{O}$ aus? Wie sehen die Elemente von $\mathfrak{m}^2, \mathfrak{m}^3, \ldots$ aus?
   (c) Geben Sie Basen von $\mathcal{O}/\mathfrak{m}, \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2, \mathfrak{m}^2/\mathfrak{m}^3, \ldots$ (aufgefasst als k-Vektorräume) an. Ist $\mathcal{O}$ regulär?
   (d) Aus den Dimensionen von $\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}$ erhält man mit [Fu, Theorem 2, Seite 71] die Vielfachheit von P auf V. Überprüfen Sie, ob das stimmt.
   (e) „$\mathcal{O}$ ist nicht viel kleiner als $\mathrm{Quot}(\mathcal{O})$:“ Zeigen Sie, dass für jedes f aus $\mathrm{Quot}(\mathcal{O})$ schon entweder f oder $\frac{1}{f}$ in $\mathcal{O}$ liegt.
   Hinweis: Wenn weder der Zähler noch der Nenner von f als Nenner in $\mathcal{O}$ geeignet ist, kann man kürzen...
   Anmerkung: Die Aussage „Für jedes $f \in \mathrm{Quot}(R)$ liegt entweder f oder $\frac{1}{f}$ in R“ ist äquivalent dazu, dass R ein diskreter Bewertungsring ist. Ein lokaler Ring bei P ist genau dann ein diskreter Bewertungsring, wenn P einfacher Punkt ist. (Das war in der Vorlesung dran.)

3. Sei $P := (0,0)$. Berechnen Sie die Schnittzahl $I(P, X^m \cap Y^n)$. (Entspricht das der Anschauung?) Laut Definition sollte $I(P, X^m \cap Y^n) = \dim(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,P}/(X^m, Y^n))$ sein. Überprüfen Sie das, indem Sie eine Basis von $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,P}/(X^m, Y^n)$ angeben.