Dr. Urs Hartl
Immanuel Herrmann

# Anwesenheitsaufgaben

1. (Im Skript 4-1). Welche Punkte in $\mathbb{P}^2$ gehören nur zu einer der Mengen $U_1, U_2, U_3$?

2. (a) $\mathbb{P}^2$ kann als die Menge der Ursprungsgeraden in $\mathbb{A}^3$ aufgefasst werden. Überlegen Sie sich, dass man $\mathbb{P}^2$ auch auffassen kann als die Einheitskugel in $\mathbb{A}^3$, wobei gegenüberliegende Punkte identifiziert werden. (Das ist eine Möglichkeit, sich die projektive Ebene anschaulich vorzustellen. Sie hat den Nachteil, dass $\mathbb{P}^2$ eben nicht wirklich die Kugel selbst ist, aber den Vorteil, dass man sieht, dass alle Punkte „gleichberechtigt“ sind; d. h. es gibt keine Punkte im Unendlichen, die was besonderes sind.)

   (b) $\mathbb{A}^3$ kann man als Vektorraum auffassen. Sei $W$ ein zweidimensionaler Untervektorraum davon (z. B. $W := \langle (3,1,4), (1,5,9) \rangle$). Wie sieht die zugehörige Menge in $\mathbb{P}^2$ aus?

   (c) Die so erhaltenen Mengen werden Geraden (in $\mathbb{P}^2$) genannt. Wie sehen diese „Geraden“ aus, wenn man sich $\mathbb{P}^2$ als Einheitskugel (mit Identifikation...) vorstellt?

   (d) Zeigen Sie: Je zwei Geraden in $\mathbb{P}^2$ haben genau einen Schnittpunkt. (Rechnen Sie in $\mathbb{A}^3$.)

   (e) Zeigen Sie: Zu je zwei Punkten in $\mathbb{P}^2$ gibt es genau eine Gerade, die durch beide Punkte geht. (Was ist z. B. mit den Punkten $(3:1:4)$ und $(1:5:9)$?)

   (f) Wenn man sich $\mathbb{P}^2$ vorstellt als $\mathbb{A}^2$ mit zusätzlichen unendlich fernen Punkten erhält man auch einen Begriff von „Gerade in $\mathbb{P}^2$“. Zeigen Sie: Die oben definierten Geraden werden auch in diesem Sinne gerade: Benutzen Sie die Inklusion $\phi_3 \colon \mathbb{A}^2 \to \mathbb{P}^2, (x_1, x_2) \mapsto (x_1 : x_2 : 1)$ und berechnen Sie den Schnitt einer Gerade in $\mathbb{P}^2$ mit $\mathbb{A}^2$. Ergibt das eine Gerade in $\mathbb{A}^2$? (Tun Sie das ganze evtl. anhand des obigen Beispiels.)

   (g) Wie sieht die Gerade durch $(1:0:0)$ und $(0:1:0)$ in $\mathbb{A}^2$ aus? Gibt es noch andere Geraden, die in $\mathbb{A}^2$ so aussehen? Was bedeutet das anschaulich?