Dr. Urs Hartl
Immanuel Herrmann

Anwesenheitsaufgaben

1. Sei $P := (0,0) \in \mathbb{A}^2 \overset{\phi_3}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^2$.

   (a) Wie sehen Elemente der lokalen Ringe $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,P}$ und $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2,\phi_3(P)}$ aus? Wie sehen die Einheiten in diesen Ringen aus?

   (b) Geben Sie einen Isomorphismus zwischen diesen Ringen an. Was ist das Bild von $\frac{Y^3-X}{XY+1} \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,P}$ unter diesem Isomorphismus?

   (c) Sei $V := V(X^2 - Y) \subset \mathbb{A}^2$. Berechnen Sie $V^* \subset \mathbb{P}^2$. (Geben Sie ein Polynom F an mit $I(F) = V^*$.)

   (d) Wie sehen die Körper $k(V)$ und $k(V^*)$ der rationalen Funktionen aus? Geben Sie einen Isomorphismus $\alpha\colon k(V) \to k(V^*)$ an.

   (e) Wie sehen die lokalen Ringe $\mathcal{O}_{V,P}$ und $\mathcal{O}_{V^*,\phi_3(P)}$ aus? Induziert α einen Isomorphismus $\mathcal{O}_{V,P}$ auf $\mathcal{O}_{V^*,\phi_3(P)}$?

   (f) Wie sehen die Ringe $\Gamma(V)$ und $\Gamma(V^*)$ aus? Was ist das Bild $\alpha(\Gamma(V))$? Geben Sie ein $U \subset V^*$ an, so dass $\alpha(\Gamma(V)) = \Gamma(U)$ ist.

   (g) Zeichnen Sie ein Diagramm, aus dem hervorgeht, welche der Ringe ab Teil (d) wie durch Inklusion geordnet sind, und was für Abbildungen es dazwischen gibt.