Algebraische Geometrie
SoSe 2003

Dr. Urs Hartl
Immanuel Herrmann

Anwesenheitsaufgaben

1. (a) Sei $P := (1 : 0 : 0)$. Für welche d gibt es Kurven vom Grad d, die P mit Vielfachheit mindestens 3 haben?

   (b) Welche Dimension hat $V(4; 3P)$ laut [Fu] Kap. 5.2, Theorem 1? Geben Sie eine Basis von $V(4; 3P)$ an.

2. (a) Sei F irreduzibel. F habe bei $(0 : 0 : 1)$ und bei $(1 : 0 : 1)$ einen zweifachen Punkt. Welchen Grad hat F mindestens (laut [Fu] Kap. 5.4, Thm 2)?

   (b) Welchen Grad hat F mindestens, wenn F nicht irreduzibel sein muss? Geben Sie ein entsprechendes F an. Und was ist, wenn man mehrfache Komponenten verbietet?

3. Seien $P_1 := (0 : 0 : 1)$, $P_2 := (1 : 0 : 1)$ und $P_3 := (0 : 1 : 1)$, und sei $V := V(2; 2P_1, 1P_2, 1P_3)$.

   (a) Was sagt Theorem 1 über $\dim V$?

   (b) Geben Sie eine Kurve aus V an.

   (c) Zeigen Sie, dass die Ungleichung von Theorem 1 in diesem Fall sogar eine Gleichung ist. Hinweis: Nehmen Sie sich eine allgemeine Kurve vom Grad 2 mit Koeffizienten a_i und machen Sie aus den Bedingungen an die Kurve Gleichungen für die a_i. Lösen Sie dieses Gleichungssystem.