Algebraische Geometrie
SoSe 2003

Dr. Urs Hartl
Immanuel Herrmann

1. Übungsblatt

Abgabetermin: Mo, 5.5.03, 14:15 Uhr, vor Beginn der Vorlesung

1. Lesen Sie das Skript:
   bis Mittwoch: Kap. 1.1 – 1.3;
   bis Montag: Kap. 1.4 – 1.6.

2. Seien R und S Ringe, und sei $\phi\colon R \to S$ ein Ringhomomorphismus. Zeigen Sie:

   (a) Ist $I \subset S$ ein Primideal, so ist $\phi^{-1}(I) \subset R$ auch ein Primideal.

   (b) Ist ϕ surjektiv und ist $I \subset R$ ein Primideal mit $\ker \phi \subset I$, so ist $\phi(I) \subset S$ auch ein Primideal.

   (4 Punkte)

3. (Im Skript Aufg. 1-17)

   (a) Sei $V \subset \mathbb{A}^n(k)$ eine algebraische Menge und $P \in \mathbb{A}^n(k)$ ein Punkt, der nicht in V liegt. Zeigen Sie, dass es ein Polynom $F \in k[X_1, \ldots, X_n]$ gibt mit $F(Q) = 0$ für alle $Q \in V$, aber $F(P) = 1$.
   Hinweis: Zeigen Sie $I(V) \neq I(V \cup \{P\})$. Nehmen Sie dann ein Polynom aus $I(V) \smallsetminus I(V \cup \{P\})$ und multiplizieren Sie es mit einem geeigneten Vorfaktor.

   (b) Seien $P_1, \ldots, P_r$ endlich viele Punkte aus $\mathbb{A}^n(k)$. Zeigen Sie, dass es Polynome $F_1, \ldots F_r \in k[X_1, \ldots, X_n]$ gibt mit

   $$F_i(P_j) = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j. \end{cases}$$

   (6 Punkte)