Algebraische Geometrie
SoSe 2003

Dr. Urs Hartl
Immanuel Halupczok

11. (und letztes) Übungsblatt

Abgabetermin: 21.7.03

1. Lesen Sie das Skript:
   bis Mittwoch: Kap. 7.1;
   bis Montag: Kap. 7.2, 7.3;
   bis Mittwoch, den 23.7.: Kap 7.4.

2. (Vgl. [Fu], 6-26.)

   (a) Sei Y eine Varietät. Zeigen Sie: Für jedes $f \in \Gamma(Y)$ ist die Abbildung $f\colon Y \to k = \mathbb{A}^1$ ein Morphismus von Varietäten. Dies liefert eine Bijektion $\Gamma(Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Var}}(Y, \mathbb{A}^1)$.

   Hinweis: Sie können Sie das Problem auf den Fall zurückführen, dass Y affin ist, indem Sie Y durch affine Varietäten überdecken und die Abbildungen verkleben.

   (b) Sei $\phi\colon X \to Y$ ein Morphismus von Varietäten, so dass $\phi(X)$ dicht in Y liegt. Zeigen Sie, dass $\tilde{\phi}\colon \Gamma(Y) \to \Gamma(X)$ injektiv ist.

   Hinweis: Zeigen Sie, dass für $f \in \Gamma(Y)$ die Menge $\{y \in Y \mid f(y) = 0\}$ abgeschlossen ist. (Falls Y affin ist, ist das klar; allgemein kann man das mit Teil (a) machen und Stetigkeit ausnutzen.)

   (c) Seien X und Y affine Varietäten. Zeigen Sie, dass $\phi(X)$ dicht in Y ist genau dann wenn $\tilde{\phi}\colon \Gamma(Y) \to \Gamma(X)$ injektiv ist.

   Hinweis: Finden Sie eine Funktion, die 0 ist auf dem Abschluss von $\phi(X)$ aber nicht auf ganz Y.

   (5 Punkte)

3. ([Fu], 6-39.) Zeigen Sie:

   (a) $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ ist birational äquivalent zu $\mathbb{P}^{m+n}$.

   (b) $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ ist nicht isomorph zu $\mathbb{P}^2$.

   Hinweis: In $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ gibt es eindimensionale abgeschlossene Untervarietäten, die sich nicht schneiden.

   (5 Punkte)

Vielen Dank für Ihre Mitarbeit. Scheine gibt's in der letzten Übungsgruppe.