Algebraische Geometrie
SoSe 2003

Dr. Urs Hartl
Immanuel Herrmann

2. Übungsblatt

Abgabetermin: Mo, 12.5.03, 14:15 Uhr, vor Beginn der Vorlesung

1. Lesen Sie das Skript:
   bis Mittwoch: Kap. 1.7;
   bis Montag: Kap. 1.8 – 1.10.

2. (Im Skript Aufg. 1-38)
   Sei k alg. abgeschlossen, $R := k[X_1, \dots X_n]$, $I \subset R$ ein Ideal und $V := V(I)$.

   (a) Geben Sie eine Bijektion zwischen den algebraischen Teilmengen von V und den Radikal-Idealen von R/I an.

   (b) Zeigen Sie: Irreduzible algebraische Teilmengen entsprechen Primidealen, und Ein-Punkt-Mengen entsprechen maximalen Idealen.

   Hinweis: Sie können die Ergebnisse von Aufgabe 1-22 verwenden. *(5 Punkte)*

3. (Im Skript Aufg. 1-25)

   (a) Zeigen Sie, dass $V(Y - X^2) \subset \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ irreduzibel ist und dass das zugehörige Ideal $I(V(Y - X^2))$ von $Y - X^2$ erzeugt wird.
   Hinweis: Zeigen Sie, dass $(Y - X^2)$ ein Primideal ist, indem Sie entweder zeigen, dass das Polynom $(Y - X^2)$ irreduzibel ist, oder dass $\mathbb{C}[X, Y]/(Y - X^2)$ ein Integritätsring ist. (Letzteres kann man tun, indem man einen Isomorphismus nach $\mathbb{C}[X]$ angibt.)

   (b) Zerlegen Sie $V := V(Y^4 - X^2, Y^4 - X^2Y^2 + XY^2 - X^3) \subset \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ in irreduzible Komponenten. Skizzieren Sie den reellwertigen Anteil von V.

   (5 Punkte)