Algebraische Geometrie
SoSe 2003

Dr. Urs Hartl
Immanuel Herrmann

4. Übungsblatt

Abgabetermin: Mo, 26.5.03, 14:15 Uhr, vor Beginn der Vorlesung

Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper.

1. Lesen Sie das Skript:
   bis Mittwoch: Kap. 2.7, 2.8 und 2.10;
   bis Montag: Kap. 2.6 und 3.1.

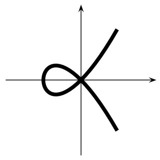
2. Sei $V \subset \mathbb{A}^n$ eine Varietät. Sei $f \in \Gamma(V)$ und $U := V \setminus V(f)$ eine offene Teilmenge von V. In dieser Aufgabe soll eine andere Beschreibung des Rings der auf U definierten rationalen Funkionen $\Gamma(U)$ gegeben werden:

   Sei $S := \{1, f, f^2, f^3, \ldots\}$. Zeigen Sie: $\Gamma(U)$ ist isomorph zu $S^{-1}\Gamma(V)$, dem Ring der Funktionen auf V, lokalisiert an S.

   Anschaulich bedeutet das: Die rationalen Funktionen, die überall definiert sind, außer vielleicht auf der Nullstellenmenge von f sind die polynomialen Funktionen geteilt durch Potenzen von f. *(4 Punkte)*

3. Betrachten Sie die Abbildung $\phi\colon \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^2, t \mapsto (t^2 - 1, t^3 - t)$. Zeigen Sie:

   (a) ϕ ist ein Morphismus von Varietäten von $\mathbb{A}^1$ nach $V := V(Y^2 - X^2(X+1)) \subset \mathbb{A}^2$.

   (b) Geben Sie den zugehörigen Morphismus $\tilde{\phi}$ der Koordinatenringe an.

   (c) Zeigen Sie: Der von $\tilde{\phi}$ induzierte Morphismus $k(V) \to k(\mathbb{A}^1)$ ist ein Isomorphismus.

   Hinweis: Geben Sie den inversen Morphismus an.

   (d) Sei $U := V \setminus \{(0,0)\}$. Zeigen Sie: $\tilde{\phi}$ induziert einen Isomorphismus $\Gamma(U) \to \Gamma(\phi^{-1}(U))$.

   Hinweis: Zeigen Sie, dass sich die Morphismen aus (c) auf $\Gamma(U)$ bzw. $\Gamma(\phi^{-1}(U))$ einschränken lassen. Evtl. können Sie auch Aufgabe 2 anwenden.

   Die Anschauung zu (d) ist: ϕ induziert einen Isomorphismus $\phi^{-1}(U) \to U$. (Dazu muss man allerdings noch definieren, was Morphismen zwischen offenen Teilmengen von Varietäten sind.)

   (6 Punkte)