Algebraische Geometrie
SoSe 2003

Dr. Urs Hartl
Immanuel Herrmann

7. Übungsblatt

Abgabetermin: Mo, 23.6.03, 14:15 Uhr, vor Beginn der Vorlesung

1. Lesen Sie das Skript:
   bis Mittwoch: Kap. 4.3;
   bis Montag: Kap. 5.1 und 5.3.

2. (a) Sei $T\colon \mathbb{A}^{n+1} \to \mathbb{A}^{n+1}$ ein Morhpismus, dessen Komponenten T_i homogene Polynome vom Grad k sind (für ein festes k). Zeigen Sie: T induziert eine Abbildung $\mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$.

   (b) Sei nun T linear (d. h. $k = 1$) und bijektiv. Zeigen Sie: Die induzierte Abbildung $\mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ bildet Geraden auf Geraden ab. (Eine Gerade in $\mathbb{P}^n$ ist eine Menge der Form $\{(\lambda a_1 + \mu b_1 : \cdots : \lambda a_{n+1} + \mu b_{n+1}) \mid \lambda, \mu \in k\}$ für gewisse $a_i, b_i \in k$.)

   Anmerkung: Eine solche Abbildung heißt *projektiver Koordinatenwechsel*.

   (5 Punkte)

3. (Im Skript 4-14 und 4-16.)

   (a) Seien $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{P}^2$ drei Punkte, die nicht auf einer Gerade liegen, und seien $Q_1, Q_2, Q_3 \in \mathbb{P}^2$ drei weitere Punkte, die auch nicht auf einer Gerade liegen. Zeigen Sie: Es gibt einen projektiven Koordinatenwechsel $T\colon \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$, der P_i auf Q_i abbildet (für $i = 1, 2, 3$).

   Hinweis: Fassen Sie $\mathbb{P}^2$ auf als $\mathbb{A}^3 \setminus \{0\}$ modulo Skalarmultiplikation und lösen Sie dort die Aufgabe.

   (b) Seien $L_1, L_2, L_3 \in \mathbb{P}^2$ drei Geraden, die sich nicht in einem Punkt schneiden und $M_1, M_2, M_3 \in \mathbb{P}^2$ drei weitere Geraden, die sich auch nicht in einem Punkt schneiden. Zeigen Sie: Es gibt einen projektiven Koordinatenwechsel $T\colon \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$, der L_i auf M_i abbildet (für $i = 1, 2, 3$).

   Hinweis: Wenden Sie Teil (a) auf die Schnittpunkte der Geraden an.

   (5 Punkte)