Algebraische Geometrie
SoSe 2003

Dr. Urs Hartl
Immanuel Herrmann

8. Übungsblatt

Abgabetermin: Mo, 30.6.03, 14:15 Uhr, vor Beginn der Vorlesung

1. Lesen Sie das Skript:
   bis Montag: Kap. 5.2, 5.4 und 5.5.

   Die Vorlesung von Mi. wird verschoben auf Fr, 7.4., 14–16 Uhr, SR 226 (HH).

2. (a) „Kreise, Parabeln und Hyperbeln sind im Projektiven das gleiche." Betrachten Sie die Varietäten $V_1 := V(X^2+Y^2-1)$ (Kreis), $V_2 := V(X^2-Y)$ (Parabel) und $V_3 := V(XY-1)$ (Hyperbel) in $\mathbb{A}^2$. Betten Sie diese Varietäten mit $\phi_3 \colon \mathbb{A}^2 \to \mathbb{P}^2$ in $\mathbb{P}^2$ ein, und geben Sie projektive Koordinatenwechsel an, die V_1^*, V_2^* und V_3^* aufeinander abbilden.

   Hinweis: Projektive Koordinatenwechsel entsprechen Automorphismen von $k[X,Y,Z]$, die X, Y und Z auf homogene Polynome vom Grad 1 abbilden.

   (b) „Der Körper der rationalen Funktionen auf dem Kreis ist ganz einfach." Geben Sie einen Isomorphismus $k(T) \to k(V_1)$ an.

   Hinweis: Einen Isomorphismus $k(T) \to k(V_3)$ zu finden ist leicht. Wenden Sie dann Teil (a) an.

   (6 Punkte)

3. Seien $F := X^3-Y^2Z$ und $G := X^2-YZ$ zwei Kurven in $\mathbb{P}^2$ (vgl. Blatt 6, Aufg. 3 (a)). Berechnen Sie alle Schnittpunkte von F und G und die Vielfachheiten dieser Schnittpunkte. Stimmt die Gesamtzahl mit der Aussage aus dem Satz von Bezout überein? *(4 Punkte)*