Übungen zur Differentialgeometrie II

Prof. Dr. M. Simon WS 2008/09
Abgabe: Freitag, 24.10. Blatt 1

Aufgabe 1.

a) Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Levi-Civita-Zusammenhang ∇, $U \subset M$ offen, $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ eine Karte von M, $c : I \to M$ eine Kurve in U und $X : I \to TM$ ein Vektorfeld längs c. Definiere

$$\frac{\nabla}{dt}X := \frac{dX^j}{dt}\frac{\partial}{\partial x_j}\mid_{\circ c} + (\Gamma_{ij}^k \circ c)\frac{dc^i}{dt}X^j\frac{\partial}{\partial x_k}\mid_{\circ c}$$

wobei $\frac{\partial}{\partial x_j}$ die Koordinatenvektorfelder der Karte φ sind, $X(t) = \sum_{j=1}^n X^j(t)\frac{\partial}{\partial x_j}\mid_{\circ c}$ und $c^i(t) = \varphi^i(c(t))$. Zeigen Sie: Die Abbildung $\frac{\nabla}{dt} : \mathcal{V}c \to \mathcal{V}c$ erfüllt folgende Eigenschaften:

1. $\frac{\nabla}{dt}(V + W) = \frac{\nabla}{dt}V + \frac{\nabla}{dt}W$ für $V, W \in \mathcal{V}c$
2. $\frac{\nabla}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{\nabla}{dt}V$ für $V \in \mathcal{V}c$ und eine beliebige Funktion $f : I \to \mathbb{R}$
3. Ist $V(t) = Y(c(t))$ für ein Vektorfeld Y auf U, so gilt $\frac{\nabla}{dt}V = \nabla_{\dot{c}}Y$, wobei $\dot{c} = \frac{dc}{dt}$.

b) Schliessen sie aus Teil a), dass die dort gegebene Definition von $\frac{\nabla}{dt}$ unabhängig von der verwendeten Karte φ ist (d.h. ist ψ eine weiter Karte auf U und wird $\frac{\tilde{\nabla}}{dt}$ analog definiert, so gilt $\frac{\nabla}{dt} = \frac{\tilde{\nabla}}{dt}$).

c) Schliessen sie weiter, daß $\frac{\nabla}{dt}$ durch die Definition aus Teil a) für beliebige Kurven in M erklärt werden kann.

Aufgabe 2.

a) Beweisen sie Fall 3 des Lemmas 1.3 aus der Vorlesung für Mannigfaltigkeiten M^n mit $n \geq 2$.

b) Beweisen sie Lemma 1.3 aus der Vorlesung für Mannigfaltigkeiten M^n mit $n = 1$.

Aufgabe 3. Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit nichtpositiver Schnittkrümmung. Sei $c : [0, a] \to M$ eine Geodätische in M und J ein Jacobi-Feld längs c mit $J(0) = 0$. Zeigen Sie: Ist $J(a) = 0$, so ist $J(t) = 0$ für alle $t \in [0, a]$. *Hinweis: Betrachten sie $g(J', J)$.*