Übungen zur Differentialgeometrie II

Prof. Simon WS 2008/09
Abgabe: Freitag, 31.10. Blatt 2

Aufgabe 1. Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, $\gamma : I \to M$ eine Geodätische und J ein nichttriviales glattes Jacobi-Feld längs γ mit $J(0) = 0$ und $J(s) = 0$ für ein $s > 0$. Zeigen Sie: Es gibt ein $\varepsilon > 0$, so dass $J(t) \neq 0$ für $t \in (s, s + \varepsilon)$. *Hinweis: Betrachten sie Normalkoordinaten um $\gamma(s)$.*

Aufgabe 2. Sei M^2 eine Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension 2, $\gamma : [0, L] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ eine Variation von Geodäten, so daß jede $\gamma(\cdot, t) : [0, L] \to M$ minimal ist, sowie $\gamma(0, t) = p$ für alle $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Bezeichne mit $J(s) := \frac{\partial \gamma}{\partial t}(s, 0)$ das Variationsfeld, welches nicht konstant Null sei. Zeigen Sie: $J(s_0) \neq 0$ für alle $s_0 \in (0, L)$.

Aufgabe 3. Sei (M, g) ein lokal symmetrischer Raum (d.h. für den Riemannschen Krümmungstensor R von M gilt $\nabla R = 0$), $\gamma : [0, \infty) \to M$ eine Geodätische. Schreibe $v = \gamma'(0)$ und $p = \gamma(0)$. Definiere eine lineare Abbildung $K_v : T_pM \to T_pM$ durch

$$K_v(x) = R(x, v)v \text{ für } x \in T_pM$$

a) Zeigen Sie: K_v ist selbstadjungiert bezüglich g.

b) Sei $\{e_1, \dots, e_n\}$ eine g-Orthonormalbasis von T_pM bezüglich derer K_v diagonal ist, etwa $K_v(e_i) = \lambda_i e_i, i = 1, \dots, n$. Sei $e_i(t)$ das parallele Vektorfeld längs γ mit $e_i(0) = e_i$ für $i = 1, \dots, n$. Zeigen sie für alle t:

$$K_{\gamma'(t)}(e_i(t)) = \lambda_i e_i(t) \text{ für } i = 1, \dots, n$$

Hinweis: Wie aus den Übungen zur Differentialgeometrie I im letzten Semester bekannt, impliziert die Voraussetzung $\nabla R = 0$ Folgendes: Sind $X(t), Y(t), Z(t)$ parallele Vektorfelder längs γ, so ist auch $R(X(t), Y(t))Z(t)$ parallel.

c) Sei $J(t) = \sum_i x_i(t)e_i(t)$ ein Jacobi-Feld längs γ. Zeigen Sie, dass die Jacobi-Gleichung äquivalent zu folgendem System ist:

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} + \lambda_i x_i = 0, \text{ für } i = 1, \dots, n$$

d) Zeigen sie, daß die konjugierten Punkte von p längs γ gegeben sind durch $\gamma(\pi k/\sqrt{\lambda_i})$ für positives λ_i, wobei k eine positive ganze Zahl ist.