Übungen zur Differentialgeometrie II

Prof. Simon — WS 2008/09

Abgabe: Freitag, 7.11. — Blatt 3

Aufgabe 1. Bestimmen sie Schnittort und konjugierten Ort eines Punktes aus $\mathbb{R} \times S^n$. Warum ist es egal, welchen Punkt man wählt?

Aufgabe 2. Sei $\gamma : [a, b] \to M$ eine glatte Kurve in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit, $\gamma(a) = p, \gamma(b) = q$ und p nicht konjugiert zu q längs γ. Zeigen Sie: Für alle $v \in T_pM$ und $w \in T_qM$ gibt es ein Jacobi-Feld J längs γ mit $J(a) = v, J(b) = w$. Inwieweit ist J durch v und w bestimmt?

Aufgabe 3. Es seien $\varphi_p : {}^gB_r(p) \to {}^{\mathbb{R}^n}B_r(0)$ Normalkoordinaten um den Punkt p in der Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g), und es sei $l \in \{1, \dots, n\}$. Nach Vorlesung gilt in diesen Koordinaten $g_{ij}(p) = \delta_{ij}$ für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Zeigen Sie: Es gilt $g_{lj}(y) = \delta_{lj}$ für alle

$$y = \varphi_p^{-1}(0, \dots, 0, \underbrace{s}_{\text{l-te Koord.}}, 0, \dots, 0)$$

mit $0 < s < r$ und $j \in \{1, \dots, n\}$.