Übungen zur Differentialgeometrie II

Prof. Simon — WS 2008/09
Abgabe: Freitag, 14.11., — Blatt 4

Aufgabe 1. Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Krümmungstensor R, $\gamma : [0,1] \to M$ eine Geodätische. Für offenes $U \subset \mathbb{R}^2$ mit $(0,0) \subset U$ heißt die glatte Abbildung $\alpha : [0,1] \times U$ eine *2-Parameter-Variation* mit festen Endpunkten von γ, falls $\alpha(s,0,0) = \gamma(s)$ für alle $s \in [0,1]$ und zusätzlich $\alpha(0, u_1, u_2) = p$ und $\alpha(1, u_1, u_2) = q$ fest. Schreibe

$$W_1(s) := \frac{\partial \alpha}{\partial u_1}(s,0,0), \quad W_2(s) := \frac{\partial \alpha}{\partial u_2}(s,0,0)$$

Zeigen Sie folgende Variationsformel für die Energie $E_\alpha : U \to \mathbb{R}, (u_1, u_2) \mapsto E(\alpha(\cdot, u_1, u_2))$:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 E_\alpha}{\partial u_1 \partial u_2}(0,0) = -\int_0^1 g(W_2, W_1'' + R(\gamma', W_1)\gamma')ds$$

Aufgabe 2. (Notation wie in Aufgabe 1)

a) Es sei

$$\mathcal{V}_0\gamma := \{V \mid V \text{ glattes Vektorfeld längs } \gamma, V(0) = 0, V(1) = 0\}$$

Definiere folgendermassen eine Abbildung $E_{**} : \mathcal{V}_0\gamma \times \mathcal{V}_0\gamma \to \mathbb{R}$: Für $W_1, W_2 \in \mathcal{V}_0\gamma$ wähle eine beliebige 2-Parameter-Variation α von γ mit festen Endpunkten und $\frac{\partial\alpha}{\partial u_1}(s,0,0) = W_1(s)$, $\frac{\partial\alpha}{\partial u_2}(s,0,0) = W_2(s)$ und setze

$$E_{**}(W_1, W_2) := \frac{1}{2}\frac{\partial^2 E_\alpha}{\partial u_1 \partial u_2}(0,0)$$

Zeigen Sie: E_{**} ist eine wohldefinierte symmetrische Bilinearform auf $\mathcal{V}_0\gamma$. *Bemerkung: Dazu gehört auch, die Existenz mindestens einer 2-Parameter-Variation α mit festen Endpunkten für beliebige $W_1, W_2 \in \mathcal{V}_0\gamma$ zu zeigen.*

b) *Bonusaufgabe:* Bleibt E_{**} wohldefiniert, wenn man die Variation α aus Teil b) nicht zwangsweise mit festen Endpunkten wählt?

Aufgabe 3. Sei N eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit der vollständigen Mannigfaltigkeit M, und $p \in M \setminus N$. Zeigen Sie: Es gibt eine Kürzeste von p nach N, und diese steht senkrecht auf N.