Übungen zur Differentialgeometrie II

Prof. Simon — WS 2008/09
Abgabe: Freitag, 21.11., — Blatt 5

Aufgabe 1. Beweisen sie folgende Erweiterung des Sturmschen Vergleichssatzes:

a) Seien $a, b : \bar{I} \to \mathbb{R}$ C^∞-Funktionen mit $a \geq b$, und u, v seien nichttriviale Lösungen von

$$\ddot{u}(t) + a(t)u(t) = 0$$
$$\ddot{v}(t) + b(t)v(t) = 0$$

auf I (I offenes, beschränktes Intervall). Dann liegt zwischen zwei Nullstellen von v immer mindestens eine Nullstelle von u, es sei denn, $a(t) = b(t) \forall t \in I$ und u und v sind Vielfache voneinander. *Hinweis: Betrachten sie*

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} [u(\ddot{v} + bv) - v(\ddot{u} + au)]$$

b) Sei a stetig auf dem Intervall I, und seien u_1, u_2 zwei linear unabhängige Lösungen der Gleichung

$$\ddot{u}(t) + a(t)u(t) = 0$$

auf I. Zeigen sie, dass die Nullstellen von u_1 und u_2 alternierend sind.

Aufgabe 2. Es sei

$$X = \{(x, \sin\frac{1}{x}) \mid 0 < x < 1\} \cup \{(0, y) \mid -1 < y < 1\}$$

mit der von $\mathbb{R}^2$ induzierten Teilraumtopologie. Zeigen sie: X ist zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend.

Aufgabe 3. Es sei (M^n, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Schnittkrümmung $\leq k$. Für $p \in M$ seien $\varphi_p : {}^gB_r(0) \to {}^{\mathbb{R}^n}B_r(0)$ Riemannsche Normalkoordinaten. Mit δ bezeichnen wir die Standardmetrik auf ${}^{\mathbb{R}^n}B_r(0)$, und es sei $\tilde{g} := (\varphi_p)_* g$. Für $x \neq 0, b \in {}^{\mathbb{R}^n}B_r(0)$ ist $l = |x| > 0$ und $x \in S_l^{n-1}(0)$, und $v_x \in T_x{}^{\mathbb{R}^n}B_r(0)$ kann man schreiben als $v_x = v_x^t + v_x^\perp$, wobei $v_x^\perp \in T_x S_l^{n-1}(0)$ und v_x^t tangential zum Strahl σ von x nach 0 ist ($\sigma : [0, l] \to {}^{\mathbb{R}^n}B_r(0), \sigma(s) := \frac{sx}{l}$). Zeigen Sie:

$$\tilde{g}(x)(v_x, v_x) \geq \begin{cases} \delta(v_x, v_x) & k = 0 \\ \delta(v_x^t, v_x^t) + \frac{R^2}{l^2}\sin^2\left(\frac{l}{R}\right)\delta(v_x^\perp, v_x^\perp) & k = \frac{1}{R^2} > 0 \\ \delta(v_x^t, v_x^t) + \frac{R^2}{l^2}\sinh^2\left(\frac{l}{R}\right)\delta(v_x^\perp, v_x^\perp) & k = -\frac{1}{R^2} < 0 \end{cases}$$

Hinweis: Vergleiche Lemma 1.15 aus der Vorlesung. Wenn Sie dieselbe Notation verwenden, können sie sich darauf beschränken, die Änderungen am Beweis aufzuschreiben.