Übungen zur Differentialgeometrie II

Prof. Simon — WS 2008/09

Abgabe: Freitag, 28.11., — Blatt 6

Aufgabe 1. Zeigen Sie: Der Durchmesser des $\mathbb{R}P^n$ ist $\frac{\pi}{2}$. Finden sie eine differenzierbar geschlossene Geodätische γ in $\mathbb{R}P^n$, die nicht nullhomotop ist (eine geschlossene Kurve γ mit $\gamma(0) = \gamma(1)$ heißt *differenzierbar geschlossen*, falls $\dot{\gamma}(0) = \dot{\gamma}(1)$). Zeigen sie, dass 2γ nullhomotop ist, wobei 2γ die Kurve ist, die durch zweifaches Durchlaufen von γ entsteht.

Aufgabe 2. Es sei $M = S^3 \subset \mathbb{C}^2$ und es seien $p, q \in \mathbb{N}$ teilerfremd. Es sei Γ die Gruppe aller $h : M \to M$ der Gestalt

$$h(z_1, z_2) = \left(e^{2\pi i \frac{n}{q}} z_1, e^{2\pi i \frac{np}{q}} z_2\right), n \in \{0, \dots, q\}$$

Zeigen sie: Γ ist isomorph zu $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ und operiert frei und eigentlich diskontinuierlich auf M. Die Mannigfaltigkeiten $L(p, q) := M/\Gamma$ heißen *Linsenräume*.

Aufgabe 3. Es sei $D := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1\}$ und $M = D \setminus \{0\}$. Es sei γ eine Rotation um einen irrationalen Winkel, und Γ die von γ erzeugte Gruppe von Isometrien $M \to M$. Zeigen Sie: Γ operiert frei, aber nicht eigentlich diskontinuierlich auf M.