Übungen zur Differentialgeometrie II

Prof. Simon — WS 2008/09
Abgabe: Freitag, 5.12. — Blatt 7

Aufgabe 1. Sei X ein topologischer Raum, und $\alpha, \beta : [0,1] \to X$ Wege in X mit $\alpha(0) = \beta(0), \alpha(1) = \beta(1)$. Der geschlossene Weg $\alpha \vee \beta^{-1}$ ist definiert durch

$$\alpha \vee \beta^{-1}(t) := \begin{cases} \alpha(2t) & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \beta(2-2t) & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Zeigen Sie: Ist $\alpha \vee \beta^{-1}$ nullhomotop, so ist α homotop zu β (mit festen Endpunkten).

Aufgabe 2. Die Gruppe $\mathbb{Z}^2$ operiert auf $\mathbb{R}^2$ per Translationen isometrisch, frei und eigentlich diskontinuierlich. Der Quotient $T^2 := \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ heißt der 2-dimensionale *Torus*. Für $v, w \in T_pT^2$ definiert man eine Riemannsche Metrik auf T^2 durch

$$g(v,w) := \delta(\pi_{*q}^{-1}(v), \pi_{*q}^{-1}w)$$

wobei $\pi : \mathbb{R}^2 \to T^2$ die Quotientenabbildung und $q \in \mathbb{R}^2$ beliebig ist, so daß $\pi(q) = p$. Damit ist π eine lokale Isometrie. Zeigen Sie: Ist c eine Geodätische in T^2 mit Anfang $\pi(0)$, so daß der Lift $\tilde{c}$ in $\mathbb{R}^2$ mit Anfang 0 rationale Steigung hat, so ist c geschlossen (d.h. es gibt ein t mit $c(t) = c(0)$).

Aufgabe 3. (Mit der Notation von Aufgabe 2). Zeigen Sie: Hat $\tilde{c}$ irrationale Steigung, so ist das Bild von c dicht in T^2.