Übungen zur Differentialgeometrie II

Prof. Simon WS 2008/09
Abgabe: Freitag, 12.02. Blatt 8

Aufgabe 1. Es sei $f : M^n \to N^k$ eine *Submersion*, d.h. $f_{*p} : T_pM \to T_{f(p)}N$ ist surjektiv für alle $p \in M$. Zeigen Sie: Es gibt offene Mengen $U \subset \mathbb{R}^k, V \subset \mathbb{R}^{n-k}$ und Koordinaten φ um p und ψ um $f(p)$, so daß

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : U \times V \to U, (x, y) \mapsto y$$

Eine Kurve γ in M heißt *vertikal*, falls $\dot{\gamma}(t)$ immer tangential zur Faser $f^{-1}(f(\gamma(t)))$ ist (und damit ganz in der Untermannigfaltigkeit $f^{-1}(f(\gamma(t)))$ verläuft). Wie werden vertikale Kurven in den gerade konstruierten Koordinaten beschrieben?

Aufgabe 2. Es seien $(\tilde{M}, \tilde{g})$, (M, g) Riemannsche Mannigfaltigkeiten, und $f : \tilde{M} \to M$ eine Submersion. Man definiert für $\tilde{p} \in \tilde{M}$

$$V_{\tilde{p}}\tilde{M} = T_{\tilde{p}}f^{-1}(f(\tilde{p})) \subset T_{\tilde{p}}M \text{ (der Vertikalraum)}$$
$$H_{\tilde{p}}\tilde{M} = V_{\tilde{p}}^{\perp} \subset T_{\tilde{p}}M \text{ (der Horizontalraum)}$$

Eine Kurve γ in $\tilde{M}$ heißt *horizontal*, falls $\dot{\gamma}(t) \in H_{\gamma(t)}\tilde{M}$ für alle t. f heisst *Riemannsche Submersion*, falls für alle $\tilde{p} \in \tilde{M}$ gilt: $f_{*\tilde{p}} : H_{\tilde{p}} \to T_{f(\tilde{p})}M$ ist eine Isometrie. Zeigen Sie: Ist f eine Riemannsche Submersion wie oben und $\tilde{M}$ vollständig, $\tilde{p} \in \tilde{M}$ und $c : [0, 1] \to M$ eine differenzierbare Kurve mit $c(0) = f(\tilde{p})$, so gibt es genau einen horizontalen Lift $\tilde{c}$ von c mit Anfang $\tilde{p}$, also eine horizontale Kurve $\tilde{c} : [0, 1]\tilde{M}$ mit $\tilde{c}(0) = \tilde{p}$ und $f \circ \tilde{c} = c$.

Aufgabe 3. (Notation und Voraussetzungen von Aufgabe 2) Zeigen Sie: Der horizontale Lift einer Geodätischen ist wieder eine Geodätische. Ist M zusammenhängend, so ist f surjektiv und M vollständig.