Übungen zur Differentialgeometrie II

Prof. Simon — WS 2008/09

Abgabe: Freitag, 19.12. — Blatt 9

Aufgabe 1. Sei (M, g) eine einfach zusammenhängende, zusammenhängende, vollständige Riemannsche Mannigfaltigkti mit Schnittkrümmung $\kappa \leq -1$ überall. Zeigen Sie:

$$vol({}^gB_r(x)) \geq vol({}^hB_r(p))$$

wobei $vol({}^hB_r(p))$ das Volumen eines Geodätischen Balls mit Radius $r > 0$ um Hyperbolischen Raum bezüglich der Standardmetrik h und $vol({}^gB_r(x))$ das Volumen eines Geodätischen Balls mit Radius $r > 0$ und und Mittelpunkt $x \in M$ in M ist. *Hinweis: Nutzen sie den Satz von Hadamard-Cartan.*

Aufgabe 2.

a) Es sei $\pi : \tilde{M} \to M$ eine Abbildung mit folgender Eigenschaft: Zu jedem $p \in M$ gibt es eine Umgebung U, so daß $\pi^{-1}(U) = \cup_{i \in I} V_i$ mit offenen, paarweise disjunkten $V_i \subset \tilde{M}$, so daß $\pi|_{V_i} : V_i \to U$ ein Homöomorphismus ist (Anmerkung: Wäre π zusätzlich surjektiv, so wäre π eine Überlagerung). Sei M vollständig, aber nicht $\tilde{M}$. Gibt es für jeden Weg in M einen Lift nach $\tilde{M}$ bezüglich π?

b) Es sei π wie in a), und zusätzliche sei π surjektiv (also eine Überlagerung). Zeigen Sie: $\tilde{M}$ ist vollständig.

Aufgabe 3. Betrachten Sie die Abbildung $\varphi : (0, 1) \to S^1, t \mapsto e^{i4\pi t}$. Zeigen Sie: φ ist ein surjektiver lokaler Diffeomorphismus, aber keine Überlagerung.