Prof. Dr. B. Wilking
Dr. A. Wörner SoSe 2011

1. Hausaufgabenblatt zur elementaren Differentialgeometrie

(**Abgabe:** bis Donnerstag 14.4.2011, 8:15 Uhr in die Zettelkästen im Hörsaalgebäude)

Aufgabe 1.1 (4 Punkte)

Es sei eine Kurve $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$c(t) = \begin{pmatrix} re^t \cos(\omega t) \\ re^t \sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

mit Konstanten $r, \omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Solch eine Kurve heißt *logarithmische Spirale.*

Zeigen Sie, dass c eine reguläre Kurve ist und berechnen Sie

(i) die Geschwindigkeit $\|\dot{c}(t)\|$, 1 P

(ii) die Bogenlänge $L(c|_{[a,b]}) = \int\limits_a^b \|\dot{c}(t)\| dt$ der auf ein Intervall $[a, b]$ eingeschränkten Kurve, 1 P

(iii) die Krümmung $\kappa_c(t)$. 2 P

Aufgabe 1.2 (4 Punkte)

Auf der Peripherie eines Kreises vom Radius $r > 0$ sei ein Punkt p fest gewählt. Nun rolle der Kreis (ohne Reibung oder Schlupf) auf einer Geraden ab.

(i) Zeigen Sie, dass die Bahn des Punktes p kongruent zu folgender Kurve c ist:

$$c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \, t \mapsto r \cdot \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix}$$

Solch eine Kurve heißt *Zykloide.* 1 P

(ii) Skizzieren Sie die Kurve c. 1 P

(iii) Auf welcher Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist c regulär? Berechnen Sie dort die Krümmung $\kappa_c(t)$. 2 P

Aufgabe 1.3 (8 Punkte)

Es sei $c\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}^2$ eine reguläre C^3-Kurve, die nach Bogenlänge parametrisiert ist. Weiterhin gelte $\kappa(t) \neq 0$ für alle t.

Für $t_0 \in [0, \infty)$ ist der Krümmungsmittelpunkt $m_c(t_0)$ gegeben durch

$$m_c(t_0) = c(t_0) + \frac{1}{\kappa(t_0)} N(t_0),$$

wobei $N(t_0) = \frac{T'(t_0)}{\|T'(t_0)\|}$ die Einheitsnormale der Kurve c im Punkte $c(t_0)$ bezeichnet. Es sei $J = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ die Matrix, die eine Drehung im $\mathbb{R}^2$ um $90°$ entgegen des Uhrzeigersinns beschreibt. Da c nach Bogenlänge parametrisiert ist, bildet $J\dot{c}(t_0)$ ebenfalls eine Einheitsnormale in $c(t_0)$. Auf diese Weise kann der Krümmung ebener Kurven ein Vorzeichen gegeben werden: positives, wenn $N(t) = J\dot{c}(t)$ gilt und negatives, wenn $N(t) = -J\dot{c}(t)$ gilt.

In dieser Aufgabe nehmen wir $N(t) = J\dot{c}(t)$ für alle t an. Außerdem sei $\kappa(t)$ monoton wachsend in t.

Wir betrachten die Kurve der Krümmungsmittelpunkte, die so genannte *Evolute* $m_c\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto m_c(t)$. Nach Voraussetzung gilt dabei:

$$m_c(t) = c(t) + \frac{1}{\kappa(t)} J\dot{c}(t)$$

(i) Zeigen Sie, dass für die Ableitung von m_c folgendes gilt:

$$\dot{m}_c(t) = -\frac{\dot{\kappa}(t)}{(\kappa(t))^2} N(t)$$

2 P

(ii) Berechnen Sie $\|\dot{m}_c(t)\|$ und die Bogenlänge $L(m_c|_{[a,b]})$ der auf ein Intervall $[a,b] \subseteq [0,\infty)$ eingeschränkten Evolute. 1 P

(iii) Folgern Sie aus (ii), dass gilt:

$$\|m_c(a) - m_c(b)\| \leq \frac{1}{\kappa(a)} - \frac{1}{\kappa(b)}$$

1 P

(iv) Beweisen Sie nun, dass für alle $0 \leq t_1 \leq t_2 < \infty$ gilt: Der Krümmungskreis an $c(t_2)$ ist im Krümmungskreis an $c(t_1)$ enthalten. Insbesondere gilt für jedes $t_0 \in [0,\infty)$: Die restliche Kurve $c|_{[t_0,\infty)}$ verlässt nicht den Krümmungskreis an $c(t_0)$. 1 P

(v) Zeigen Sie, dass die Evolute endliche Länge hat, d. h. $L(m_c) = \lim_{b\to\infty} L(m_c|_{[0,b]})$ existiert und ist endlich. Folgern Sie, dass die Evolute einem Grenzpunkt $m_{c\,\infty} := \lim_{t\to\infty} m_c(t)$ zustrebt. 2 P

(vi) Beweisen Sie, dass $\|m_{c\,\infty} - c(t)\|$ für $t \to \infty$ konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert. 1 P

Organisatorisches:

Die Abgabe der Hausaufgaben erfolgt zum jeweils auf dem Aufgabenblatt angegebenen Termin durch Einwurf in die Zettelkästen (Nummern siehe unten) im Hörsaalgebäude.

Um zur Klausur zugelassen zu werden, benötigen Sie 50% der Hausaufgabenpunkte. Termin und Ort der Klausur werden noch bekannt gegeben.

Anwärter auf einen Sitzschein benötigen 25% der Hausaufgabenpunkte.

Übungsgruppe Nr. 1 findet dienstags von 12 bis 14 Uhr im Raum SR 4 statt. Zettelkasten: 011

Übungsgruppe Nr. 2 findet mittwochs von 10 bis 12 Uhr im Raum SR 1B statt. Zettelkasten: 101