Prof. Dr. B. Wilking
Dr. A. Wörner

SoSe 2011

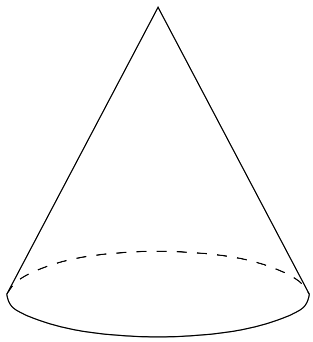
10. Hausaufgabenblatt zur elementaren Differentialgeometrie

(**Abgabe:** bis **Mittwoch 22.6.2011, 14:00 Uhr** in die Zettelkästen im Hörsaalgebäude)

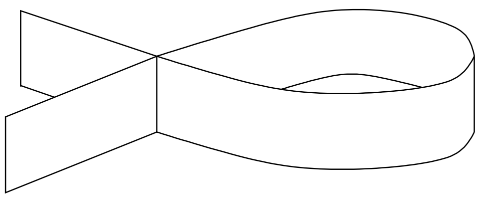
Aufgabe 10.1 (8 Punkte)

Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^3$ (die begrenzenden Kurven gehören jeweils nicht dazu) können Bilder von Immersionen, Bilder von Einbettungen oder Untermannigfaltigkeiten sein? Begründen Sie jeweils ihre Antwort.

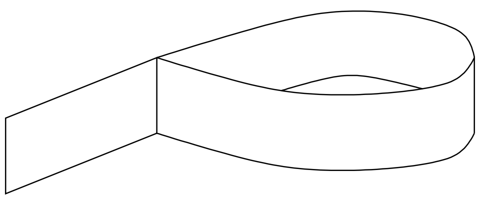
(i) Ein Kegel 2 P



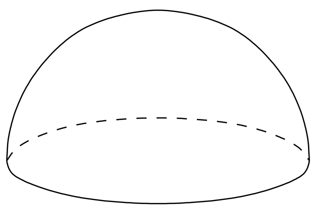
(ii) Ein Band mit Selbstschnitt 2 P



(iii) Ein Band, dessen Abschluss sich innen berührt 2 P



(iv) Eine Hemisphäre 2 P



Aufgabe 10.2 (4 Punkte)

Im $\mathbb{R}^3$ sei die folgende Sextik (das Nullstellengebilde eines Polynoms vom Grade 6) gegeben:

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x^2 - y^3)^2 - (z^2 - y^2)^3 = 0\}$$

Zeigen Sie, dass F lokal bei jedem Punkt eine immergierte Fläche ist mit Ausnahme von höchstens der Menge zweier ebener Kurven auf F.

Aufgabe 10.3 (4 Punkte)

Es seien $0 < r < R$ gegeben. Im kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ sei ein Kreis in der x-z-Ebene wie folgt gegeben: Der Mittelpunkt sei $(R, 0, 0)$, der Radius sei r. Rotiert dieser Kreis um die z-Achse, entsteht als Fläche ein sogenannter *Torus*.

(i) Zeigen Sie, dass der Torus wie folgt parametrisiert werden kann:

$$\Phi\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3\,,\ (\varphi, t) \mapsto \begin{pmatrix} (R + r\cos\varphi)\cos t \\ (R + r\cos\varphi)\sin t \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$$

1 P

(ii) Zeigen Sie, dass Φ eine Immersion ist und berechnen Sie die 1. Fundamentalform. 3 P