Prof. Dr. B. Wilking
Dr. A. Wörner SoSe 2011

## 11. Hausaufgabenblatt zur elementaren Differentialgeometrie, Teil 1

(**Abgabe:** bis **Freitag 1.7.2011, 14:00 Uhr** in die Zettelkästen im Hörsaalgebäude)

**Aufgabe 11.1** (4 Punkte)

Es sei $V \subseteq \mathbb{R}^3$ offen und $f\colon V \to \mathbb{R}$ eine $C^\infty$-Funktion. Wir setzen $S := f^{-1}(0)$ und nehmen an, dass $\nabla f(p) \neq 0$ ist für alle $p \in S$.

Zeigen Sie, dass für jedes $p \in S$ gilt: Ist $c\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ eine reguläre $C^\infty$-Kurve mit $c(0) = p$, so stehen $\dot{c}(0)$ und $\nabla f(p)$ senkrecht aufeinander.

*Hinweis:* Betrachten Sie die Abbildung $f \circ c$. Erinnern Sie sich an die Kettenregel.

**Aufgabe 11.2** (4 Punkte)

Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $f\colon U \to \mathbb{R}$ eine $C^\infty$-Funktion. Die Fläche $S \subseteq \mathbb{R}^3$ sei gegeben durch den Graphen von $f$, also $S = \operatorname{graph} f = \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in U\}$.

Zeigen Sie, dass durch

$$N(x,y) := \frac{1}{\sqrt{1 + \|\nabla f(x,y)\|^2}} \begin{pmatrix} -\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ -\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \ (x,y) \in U$$

ein *Einheitsnormalenfeld zu $S$* gegeben ist, d. h.: Für alle $(x, y) \in U$ ist $N(x, y)$ ein Einheitsvektor und steht senkrecht auf allen Vektoren tangential an $S$ im Punkt $(x, y, f(x, y))$.

## 11. Hausaufgabenblatt zur elementaren Differentialgeometrie, Teil 2

(**Abgabe:** bis **Freitag 1.7.2011, 14:00 Uhr** in die Zettelkästen im Hörsaalgebäude)

**Aufgabe 11.3** (4 Punkte)

Es seien $f, S$ und $N$ gegeben wie in Aufgabe 11.2. Berechnen Sie die 2. Fundamentalform.

**Aufgabe 11.4** (4 Punkte)

Für $0 < r < R$ sei der Torus gegeben wie in Aufgabe 10.3, nämlich folgendermaßen:

$$\Phi\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \,,\ (\varphi, t) \mapsto \begin{pmatrix} (R + r\cos\varphi)\cos t \\ (R + r\cos\varphi)\sin t \\ r \sin\varphi \end{pmatrix}$$

Es sei $N\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{S}^2$ das nach außen weisende Einheitsnormalenfeld des Torus'.

Geben Sie eine Parametrisierung von $N$ an und berechnen Sie die 2. Fundamentalform.