Prof. Dr. B. Wilking
Dr. A. Wörner SoSe 2011

2. Hausaufgabenblatt zur elementaren Differentialgeometrie

(**Abgabe:** bis Donnerstag 21.4.2011, 10:15 Uhr in die Zettelkästen im Hörsaalgebäude)

Aufgabe 2.1 (4 Punkte)

Es sei die Kurve $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch:

$$c(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{\pi} \int\limits_0^t \cos \frac{\pi s^2}{2} ds \\ \sqrt{\pi} \int\limits_0^t \sin \frac{\pi s^2}{2} ds \end{pmatrix}$$

Solche eine Kurve heißt *Klothoide* bzw. *Spinnkurve* oder auch *Cornu-Spirale*.

(i) Zeigen Sie, dass c regulär ist und proportional zur Bogenlänge parametrisiert, d. h. $\|\dot{c}\|$ ist konstant. 1 P

(ii) Zeigen Sie, dass c punktsymmetrisch zum Ursprung ist. 1 P

(iii) Zeigen Sie, dass die Krümmung in jedem Kurvenpunkt mit der Bogenlänge der Kurve vom Ursprung zu diesem Punkt übereinstimmt, d. h. $\kappa_c(t) = L\left(c|_{[0,t]}\right)$ für alle $t \geq 0$.

Was ist der Vorteil für Straßen- und Schienenfahrzeuge, wenn der Übergang von gerader Strecke in die Kurve Klothoidenbögen folgt anstatt Kreisbögen? 2 P

Aufgabe 2.2 (4 Punkte)

Eine reelle $(n \times n)$-Matrix A heißt *orthogonal*, wenn ihre Transponierte ihre Inverse ist, also $A^tA = AA^t = E_n$ (Einheitsmatrix) gilt. Die Menge der orthogonalen $(n \times n)$-Matrizen wird mit $O(n)$ bezeichnet. Ist $A \in O(n)$ und $b \in \mathbb{R}^n$, so bezeichnet man die Abbildung $x \mapsto Ax + b$ als *Bewegung* des $\mathbb{R}^n$.

Nun sei I ein Intervall und $c\colon I \to \mathbb{R}^n$ eine reguläre C^2-Kurve. Zeigen Sie, dass Bogenlänge und Krümmung von c invariant sind unter Bewegungen, d. h.: Ist $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Bewegung, so gilt

$$L(\varphi \circ c) = L(c) \qquad \text{und} \qquad \kappa_{\varphi \circ c}(t) = \kappa_c(t) \text{ für alle } t.$$

2+2 P

Hinweis: Zeigen Sie, dass das Skalarprodukt invariant unter $O(n)$ ist, d. h.: Ist $A \in O(n)$, so gilt $\langle Au, Av \rangle = \langle u, v \rangle$ für alle $u, v \in \mathbb{R}^n$.

Aufgabe 2.3 (4 Punkte)

Ist I ein Intervall und $c\colon I \to \mathbb{R}^n$ eine reguläre C^2-Kurve mit $\kappa(t) \neq 0$ für alle $t \in I$, so wird die Evolute definiert durch

$$m_c(t) = c(t) + \frac{1}{\kappa(t)} N(t)$$

(vgl. Aufgabe 1.3).

Zeigen Sie, dass die Evolute der Normalparabel $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y = x^2\}$ gegeben ist durch $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(y - \frac{1}{2}\right)^3 = \frac{27}{16} x^2\right\}$.

Aufgabe 2.4 (4 Punkte)

Es sei I ein Intervall und $c\colon I \to \mathbb{R}^2$ [Korrektur] eine reguläre wegparametrisierte C^3-Kurve. Für ein festes $t_0 \in \mathbb{R}$ definieren wir die so genannte *Evolvente* e_c der Kurve c durch:

$$e_c(t) = c(t) - (t - t_0)\dot{c}(t)$$

Für $t_0 \in I$ kann man e_c interpretieren als die Bahn, die ein Faden beschreibt, der von c abgewickelt wird.

Zeigen Sie: Die Evolute (siehe Aufgabe 2.3) der Evolvente ist die Ausgangskurve c, also

$$m_{e_c} = c.$$

Organisatorisches:

Die Klausur findet am Donnerstag, dem 14.07.2011 um 8.30 Uhr im Hörsaal M 1 statt.