Prof. Dr. B. Wilking
Dr. A. Wörner

SoSe 2011

3. Hausaufgabenblatt zur elementaren Differentialgeometrie

(**Abgabe:** bis Donnerstag 28.4.2011, 10:15 Uhr in die Zettelkästen im Hörsaalgebäude)

Aufgabe 3.1 (4 Punkte)

Auf der Peripherie eines Kreises vom Radius $r > 0$ sei ein Punkt p fest gewählt. Die Zykloide aus Aufgabe 1.2 war die Bahn dieses Punktes, wenn der Kreis auf einer Geraden abrollt. Nun rolle der Kreis außen auf einem anderen Kreis vom Radius $R > 0$ ab. Die Bahn von p nennt man *Epizykloide*.

Zeigen Sie, dass die Epizykloide gegeben ist durch:

$$c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2\,,\ t \mapsto \begin{pmatrix} (r+R)\cos t - r\cos\left(\left(1+\frac{R}{r}\right)t\right) \\ (r+R)\sin t - r\sin\left(\left(1+\frac{R}{r}\right)t\right) \end{pmatrix}$$

2 P

Setzt man $m := 1 + \frac{R}{r}$, so erhält man die folgende Form der Darstellung:

$$c(t) = \begin{pmatrix} mr\cos t - r\cos(mt) \\ mr\sin t - r\sin(mt) \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie, dass die Evolute dieser Epizykloide die folgende Epizykloide ist:

$$m_c(t) = \frac{m-1}{m+1}\begin{pmatrix} mr\cos t + r\cos(mt) \\ mr\sin t + r\sin(mt) \end{pmatrix}$$

2 P

Aufgabe 3.2 (4 Punkte)

Es sei I ein Intervall und $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$ eine reguläre ebene Kurve. Für ein festes $s \in \mathbb{R}$ heißt $\gamma_s(t) := \gamma(t) + s \cdot N_\gamma(t)$ eine *Parallelkurve* von γ. (Hierbei ist $N_\gamma(t) = JT_\gamma(t)$ das Einheitsnormalenfeld ebener Kurven.)

In Aufgabe 2.4 wurden Evolventen für wegparametrisierte ebene Kurven definiert. Ist γ nicht wegparametrisiert, so definiere die Evolventen wie folgt: Es sei $t_0 \in I$ fest gegeben. Dann ist

$$e_\gamma(t) := \gamma(t) - \int_{t_0}^{t} \|\dot\gamma(\tau)\| d\tau \cdot T_\gamma(t)$$

eine (von t_0 abhängende) Evolvente von γ.

Nun sei $c\colon I \to \mathbb{R}^2$ wegparametrisiert sowie C^3. Ferner verschwinde die Krümmung nirgends. Zeigen Sie, dass jede Evolvente der Evolute von c eine Parallelkurve von c ist, also

$$e_{m_c}(t) = c(t) + s \cdot N_c(t)$$

mit $s \in \mathbb{R}$ passend.

Aufgabe 3.3 (4 Punkte)

Es sei I ein Intervall und $\kappa\colon I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Weiter seien $x_0 \in \mathbb{R}^2$ und $v_0 \in \mathbb{S}^1$ gegeben, sowie $t_0 \in I$. Es sei $c\colon I \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$\begin{aligned} c(t) &= x_0 + \int_{t_0}^{t} v(\tau)d\tau, \\ v(t) &= e^{i\varphi(t)}v_0, \\ \varphi(t) &= \int_{t_0}^{t} \kappa(\tau)d\tau. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass c die eindeutige wegparametrisierte ebene C^2-Kurve ist mit Krümmung κ, $c(t_0) = x_0$ und $\dot{c}(t_0) = v_0$.

Aufgabe 3.4 (4 Punkte)

Es sei I ein Intervall und $c\colon I \to \mathbb{R}^2$ eine reguläre wegparametrisierte ebene C^2-Kurve. Es gelte $\|c(t)\| \leq R$ für alle $t \in I$ und ein festes $R > 0$. Mit anderen Worten, die Kurve c verläuft innerhalb der abgeschlossenen Kreisscheibe mit Radius R um den Ursprung. Es gebe ein $t_0 \in I$ mit $\|c(t_0)\| = R$, d. h. in t_0 berühre die Kurve c den Rand der Kreisscheibe.

Zeigen Sie:

$$|\kappa_c(t_0)| \geq \frac{1}{R}$$

Hinweis: Überlegen Sie sich, was die Bedingungen für die reelle Funktion $t \mapsto \|c(t)\|^2 = \langle c(t), c(t)\rangle$ an der Stelle t_0 bedeuten. Erinnern Sie sich nun an Analysis I.

Organisatorisches:

Die Nachklausur findet am Dienstag, dem 04.10.2011 um 9.00 Uhr im Hörsaal M 2 statt.

Das Skript zur Vorlesung, die Hausaufgabenblätter sowie deren Musterlösungen sind von folgender Webseite abrufbar:
`http://wwwmath.uni-muenster.de/reine/u/wilking/Veranstaltungen/DG-SS2011.html`