Prof. Dr. B. Wilking
Dr. A. Wörner SoSe 2011

4. Hausaufgabenblatt zur elementaren Differentialgeometrie

(**Abgabe:** bis Donnerstag 5.5.2011, 10:15 Uhr in die Zettelkästen im Hörsaalgebäude)

Aufgabe 4.1 (4 Punkte)

Zur Erinnerung: Eine Teilmenge $C \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *konvex*, falls gilt: Sind $p, q \in C$, so ist auch $tp + (1-t)q \in C$ für alle $t \in [0,1]$.

Zeigen Sie den folgenden Spaltungssatz: Ist $C \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und konvex und enthält C die x_1-Achse, so gibt es eine abgeschlossene konvexe Menge $C' \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ mit:

$$C = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \in \mathbb{R}\,,\ (x_2, \dots, x_n) \in C'\}$$

Mit anderen Worten, C spaltet als $C = \mathbb{R} \times C'$.

Hinweis: Betrachten Sie für $x \in C$ die Strecken von x nach te_1 und nach $-te_1$ für $t \to \infty$.

Aufgabe 4.2 (4 Punkte)

Es sei $I = [a, b]$ ein Intervall und $c\colon I \to \mathbb{R}^2$ eine geschlossene ebene C^1-Kurve. Weiter sei $p \in \mathbb{R}^2 \setminus c(I)$ ein Punkt außerhalb der Kurve. Für die Umlaufzahl $n_{c,p}$ von c bezüglich p gilt folgende Formel:

$$n_{c,p} = \frac{1}{2\pi} \int_a^b \frac{\langle \dot{c}(t), J(c(t)-p)\rangle}{\|c(t)-p\|^2} dt$$

Zeigen Sie:

(i) Die Umlaufzahl $n_{c,p}$ ist invariant unter stetiger Deformation des Bezugspunktes, d. h.: Ist $p\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2 \setminus c(I)$ eine stetige Funktion, so ist $s \mapsto n_{c,p(s)}$ konstant. 2 P

(ii) Entlang einer Geraden, die c nicht schneidet, ist die Umlaufzahl konstant Null, d. h.: Sind $p, v \in \mathbb{R}^2$ gegeben und gilt $p(s) := p + sv \notin c(I)$ für alle $s \in \mathbb{R}$, so gilt $n_{c,p(s)} = 0$ für alle $s \in \mathbb{R}$. 2 P

Hinweise: Bei (i) erinnern Sie sich an einen wichtigen Satz über stetige Funktionen aus der Analysis I. Benutzen Sie das Ergebnis dann, um (ii) zu lösen. Überlegen Sie sich, dass die Gerade Punkte enthält, die beliebig weit von jedem Punkt der Kurve c entfernt sind. Zeigen Sie, dass für solche Punkte die Umlaufzahl Null sein muss.

Aufgabe 4.3 (4 Punkte)

Es sei eine Kurve c gegeben durch

$$c\colon [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^2\,,\ t \mapsto 3 \cdot \begin{pmatrix} \cos 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix}$$

und es sei $p = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie die Umlaufzahl $n_{c,p}$.

Hinweis: Sie dürfen Aufgabe 4.3 benutzen.

Aufgabe 4.4 (4 Punkte)

Es sei $c\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ eine geschlossene, reguläre, ebene C^1-Kurve. Eine Gerade G heißt *Doppeltangente*, wenn es $t_1, t_2 \in [a,b)$, $t_1 \neq t_2$ gibt, so dass G Tangente in $c(t_1)$ und $c(t_2)$ ist.
Die Kurve c hat einen *Doppelpunkt*, wenn es $t_1, t_2 \in [a,b)$, $t_1 \neq t_2$ gibt mit $c(t_1) = c(t_2)$.

Zeigen Sie, dass c eine Doppeltangente besitzt, wenn c einen Doppelpunkt hat.

Hinweis: Falls in einem Doppelpunkt die Tangenten übereinstimmen, ist die Doppeltangente gefunden. Im anderen Fall wählen Sie einen beliebigen Punkt $p \in \mathbb{R}^2$ und betrachten den Punkt $c(t_0)$, der auf c am weitesten von p entfernt ist (nicht eindeutig, aber warum existiert solch einer?). Überlegen Sie sich, dass ganz c in einem abgeschlossenen Halbraum liegt, der von der Tangente an $c(t_0)$ begrenzt wird. Nun lassen Sie t_0 wachsen (oder fallen) und verfolgen die Tangente. Warum kann c nicht für immer vollständig auf einer Seite der Tangente liegen? Was passiert beim Übergang?