Prof. Dr. B. Wilking
Dr. A. Wörner

SoSe 2011

5. Hausaufgabenblatt zur elementaren Differentialgeometrie

(**Abgabe:** bis Donnerstag 12.5.2011, 10:15 Uhr in die Zettelkästen im Hörsaalgebäude)

Aufgabe 5.1 (4 Punkte)

Es sei I ein Intervall und $c\colon I \to \mathbb{R}^2$ eine reguläre, ebene C^3-Kurve, deren Krümmung κ_c nirgends verschwindet. Hat die Krümmung bei $t_0 \in I$ ein lokales Extremum, so nennt man $c(t_0)$ einen *Scheitelpunkt* der Kurve c.

Zeigen Sie: Ist $c(t_0)$ ein Scheitelpunkt, so wechselt die Tangente der Evolute m_c bei t_0 die orientierte Richtung. Insbesondere ist m_c bei t_0 nicht regulär.

Aufgabe 5.2 (4 Punkte)

Es sei

$$c\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2\,,\ t \mapsto \begin{pmatrix} \cos 3t \\ \sin 2t \end{pmatrix}.$$

Skizzieren Sie den Verlauf der Kurve und bestimmen Sie anhand der Skizze für jede Zusammenhangskomponente des Komplements $\mathbb{R}^2 \setminus c([0, 2\pi])$ die jeweilige Umlaufzahl.

Aufgabe 5.3 (4 Punkte)

Es sei $c\colon [0, L] \to \mathbb{R}^n$ eine reguläre, wegparametrisierte C^2-Kurve. Weiterhin gebe es ein $R > 0$ mit $\|c(t)\| \le R$ für alle $t \in [0, L]$. Die (im Fall $n = 2$ nicht-orientierte) Krümmung von c sei κ_c.

(i) Zeigen Sie:

$$\int_0^L \kappa_c(t)dt \ge \frac{L}{R} - 2$$

2 P

(ii) Nun sei c zusätzlich differenzierbar geschlossen. Zeigen Sie:

$$\int_0^L \kappa_c(t)dt \ge \frac{L}{R}$$

2 P

Hinweis: Setzen Sie $f(t) = \langle \dot{c}(t), c(t) \rangle$ und überlegen Sie sich für (i) zunächst $\int\limits_0^L f'(t)dt \le 2R$.

Aufgabe 5.4 (4 Punkte)

Es sei I ein Intervall und $c\colon I \to \mathbb{R}^2$ eine reguläre, ebene C^2-Kurve mit folgender Eigenschaft: Alle Normalen der Kurve verlaufen durch einen festen Punkt $p \in \mathbb{R}^2$.

Zeigen Sie, dass c einen Kreisbogen parametrisiert.