Prof. Dr. B. Wilking
Dr. A. Wörner SoSe 2011

6. Hausaufgabenblatt zur elementaren Differentialgeometrie

(**Abgabe:** bis Donnerstag 19.5.2011, 10:15 Uhr in die Zettelkästen im Hörsaalgebäude)

Aufgabe 6.1 (2 Punkte)

Die Erdoberfläche werde als Sphäre angenommen. Man gehe jeweils entlang von Längen- oder Breitenkreisen und starte bei einem Ausgangspunkt A. Von dort gehe man 100 km nach Norden, anschließend 100 km nach Westen, dann 100 km nach Süden und von dort 100 km nach Osten. Danach befinde man sich wieder am Ausgangspunkt A.

Wo liegt A? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 6.2 (4 Punkte)

Ein Flugzeug fliege auf kürzestem Weg (bei vernachlässigbarer Flughöhe) von Berlin nach Québec (Kanada). Die geografische Lage Berlins ist 52° 31' Nord, 13° 24' Ost, die Québecs ist 46° 49' Nord, 71° 13' West. Welches ist der nördlichste Breitenkreis, den das Flugzeug erreicht?

Aufgabe 6.3 (6+2* Punkte)

Es sei (X, d) ein metrischer Raum und $p, q \in X$. Ein Punkt $m \in X$ heißt *Mittelpunkt von p und q*, wenn gilt: $2d(p, m) = 2d(q, m) = d(p, q)$. Für ein festes $\varepsilon > 0$ heißt m ein *ε-Mittelpunkt von p und q*, wenn gilt: $|2d(p, m) - d(p, q)| \leq \varepsilon$ und $|2d(q, m) - d(p, q)| \leq \varepsilon$.

Zeigen Sie:

(i) Ist (X, d) geodätisch, so existiert für alle $p, q \in X$ ein Mittelpunkt. 1 P

(ii) Ist (X, d) inner metrisch, so existiert für alle $p, q \in X$ ein ε-Mittelpunkt für jedes $\varepsilon > 0$. 2 P

(iii) Ist (X, d) vollständig (d. h. jede Cauchy-Folge konvergiert), so gilt die Umkehrung der Aussage (i). 3 P

(iv) (freiwillig) Ist (X, d) vollständig, so gilt auch die Umkehrung der Aussage (ii). 2* P

Hinweis: Um die Umkehrung von (i) zu zeigen, seien $p, q \in X$ und $d(p, q) = L$. Konstruieren Sie eine L-Lipschitz-Abbildung $c\colon [0, 1] \to X$ mit $c(0) = p$, $c(1) = q$, indem Sie c zunächst auf einer abzählbaren, dichten Teilmenge von $[0, 1]$ definieren.

Aufgabe 6.4 (4 Punkte)

Wir betrachten die Einheitssphäre $\mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\|_2 = 1\}$ mit der inneren Metrik d. Ein *regelmäßiges n-Eck $F \subseteq \mathbb{S}^2$* ist eine Fläche mit n abstandsrealisierenden Geodätischen gleicher Länge als Seiten, so dass alle n Innenwinkel gleich groß sind und die Fläche sphärisch konvex ist, d. h. sind $p, q \in F$ mit $d(p, q) < \pi$, so ist auch die abstandsrealisierende Geodätische zwischen p und q in F enthalten.

Unter einer *regulären Pflasterung* der $\mathbb{S}^2$ in n-Ecke verstehen wir eine endliche Kollektion kongruenter regelmäßiger n-Ecke mit den folgenden Eigenschaften:

- Die n-Ecke überdecken die $\mathbb{S}^2$.
- Ist der Schnitt zweier verschiedener n-Ecke nichtleer, so besteht er aus einem oder mehreren gemeinsamen Eckpunkten und den Verbindungsseiten dazwischen.

(i) Wir nehmen an, die $\mathbb{S}^2$ sei derart in n-Ecke regulär gepflastert, dass an jeder Ecke k der n-Ecke zusammenstoßen. Bestimmen Sie die Innenwinkel der n-Ecke. 1 P

(ii) In der Situation aus (i) sei $n = 5$. Zeigen Sie, dass für k nur die Werte $k = 2$ und $k = 3$ in Frage kommen. 1 P

Hinweis: Ein regelmäßiges n-Eck lässt sich in n kongruente Dreiecke teilen.

(iii) Zeigen Sie, dass in der Situation aus (ii) für $k = 2$ eine reguläre Pflasterung existiert und bestimmen Sie die Anzahl der Fünfecke sowie deren Seitenlängen. 1 P

(iv) In der Situation aus (ii) existiert auch für $k = 3$ eine reguläre Pflasterung. Bestimmen Sie die Anzahl der Fünfecke sowie deren Seitenlängen. 1 P

Bemerkung: Die Existenz dieser Pflasterung folgt aus der Existenz des *Dodekaeders*, eines regulären Körpers, dessen Seiten aus regelmäßigen ebenen Fünfecken bestehen. Einbeschrieben in die $\mathbb{S}^2$ liefern die Ecken des Dodekaeders genau die Ecken der Pflasterung.