Prof. Dr. B. Wilking
Dr. A. Wörner SoSe 2011

7. Hausaufgabenblatt zur elementaren Differentialgeometrie

(**Abgabe:** bis Donnerstag 26.5.2011, 10:15 Uhr in die Zettelkästen im Hörsaalgebäude)

Aufgabe 7.1 (4 Punkte)

Es sei ein hyperbolisches Dreieck mit Seitenlängen a, b, c und Winkeln α, β, γ gegeben.

(i) Es seien $a = 2, b = 3, c = 4$. Berechnen Sie α, β, γ. 1 P

(ii) Es seien $a = 5, \beta = \frac{1}{3}\pi, \gamma = \frac{2}{5}\pi$. Berechnen Sie α, b, c. 1 P

(iii) Berechnen Sie die Längen der Höhen und Seitenhalbierenden der Dreiecke aus (i) und (ii). 2 P

Aufgabe 7.2 (4 Punkte)

Wir betrachten $\mathbb{H}^2 \subseteq \mathbb{R}^{2,1}$, also die hyperbolische Ebene im Minkowski-Modell. Es seien die Punkte $p = \sinh 3e_1 + \cosh 3e_3$ und $q = \sinh 2e_2 + \cosh 2e_3$ gegeben.

(i) Berechnen Sie die Geodätische von p nach q. 1 P

(ii) Stellen Sie die Formel für die Geodätische von p in Richtung e_2 auf. 1 P

(iii) Geben Sie eine Matrix $A \in O_+(2,1)$ an mit $Ap = q$. 2 P

Aufgabe 7.3 (4 Punkte)

In der hyperbolischen Ebene seien drei paarweise verschiedene Punkte A, B, X gegeben, die auf einer hyperbolischen Geraden liegen. Das *hyperbolische Teilverhältnis* ist definiert als

$$\mathrm{TV_h}(A, X, B) := \begin{cases} \frac{\sinh|AX|}{\sinh|BX|} & : X \text{ liegt zwischen } A \text{ und } B \\ -\frac{\sinh|AX|}{\sinh|BX|} & : \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweisen Sie den *Satz von Menelaos*[1] für hyperbolische Dreiecke:

Es sei $\triangle ABC$ ein hyperbolisches Dreieck und g eine hyperbolische Gerade, die durch keinen der Punkte A, B, C verläuft. Die Gerade g schneide die Gerade durch A, B in einem Punkt P, die Gerade durch B, C in einem Punkt Q und die Gerade durch A, C in einem Punkt R. Dann gilt:

$$\mathrm{TV_h}(A, P, B) \cdot \mathrm{TV_h}(B, Q, C) \cdot \mathrm{TV_h}(C, R, A) = -1$$

Hinweis: Überlegen Sie sich, dass entweder genau ein oder genau drei der obigen Teilverhältnisse negativ sind. Benutzen Sie dann den Sinussatz.

Aufgabe 7.4 (4 Punkte)

Es seien X und Y metrische Räume. Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt *lokale Isometrie*, wenn es zu jedem $x \in X$ eine offene Kugel $B_r(x)$ gibt, so dass die Abbildung $f|_{B_r(x)}\colon B_r(x) \to f(B_r(x))$ eine Isometrie ist.

Nun seien X und Y innere metrische Räume und $f\colon X \to Y$ eine lokale Isometrie. Zeigen Sie, dass f eine 1-Lipschitz-Abbildung ist, aber im allgemeinen keine Isometrie.

[1] stammt aus der Euklidischen Geometrie. Das Teilverhältnis ist dann analog definiert, allerdings ohne Anwendung von sinh auf die Seitenlängen.