Prof. Dr. B. Wilking
Dr. A. Wörner SoSe 2011

8. Hausaufgabenblatt zur elementaren Differentialgeometrie

(**Abgabe:** bis **Mittwoch 1.6.2011, 14:00 Uhr** in die Zettelkästen im Hörsaalgebäude)

Aufgabe 8.1 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass der hyperbolische Abstand im Poincaré-Scheibenmodell $\mathbb{E}$ gegeben ist durch:

$$d_{hyp}(v,w) = \operatorname{arcosh}\left(1 + \frac{2\|v-w\|^2}{(1-\|v\|^2)(1-\|w\|^2)}\right) \qquad \text{für } v,w \in \mathbb{E}$$

Zeigen Sie dazu, dass die Umkehrabbildung der stereografischen Projektion ι von $\mathbb{H}^2$ auf $\mathbb{E}$ gegeben ist durch:

$$\iota^{-1}\colon \mathbb{E} \to \mathbb{H}^2\,,\; v \mapsto \frac{1}{1-\|v\|^2}\begin{pmatrix} 2v \\ 1+\|v\|^2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8.2 (4 Punkte)

Im Poincaré-Modell der hyperbolischen Ebene seien eine hyperbolische Gerade G (d. h. G ist das Bild einer Geodätischen) gegeben und ein Punkt $p \notin G$. Zeigen Sie, daß es auf G genau einen Punkt q gibt mit minimalem Abstand zu p. Zeigen Sie für den Beweis der Eindeutigkeit, dass die hyperbolische Gerade durch p und q eindeutig ist und senkrecht auf G steht.

Aufgabe 8.3 (8 Punkte)

Ziel dieser Aufgabe ist der Beweis, dass jedes hyperbolische Dreieck einen Inkreis besitzt, dessen Durchmesser höchstens $\log 3$ ist.

Dazu sei im Poincaré-Modell ein hyperbolisches Dreieck mit Seiten a, b, c und Winkeln α, β, γ gegeben, wobei wie üblich α gegenüber von a liegt, usw. Mit G_a, G_b, G_c bezeichnen wir die hyperbolischen Geraden, die aus a, b, c durch Verlängerung zu Geraden entstehen.

(i) Zeigen Sie: Ein Punkt x liegt genau dann auf der Winkelhalbierenden des Winkels α, wenn kürzeste Geodätische von x auf die Geraden G_b und G_c gleich lang sind. 2 P
Hinweis: Aufgabe 8.2

(ii) Zeigen Sie, dass sich die drei Winkelhalbierenden des Dreiecks paarweise schneiden. Folgern Sie mit (i), dass diese Schnittpunkte zu einem Punkt p zusammenfallen. 2 P

(iii) Wir verbinden p durch hyperbolische Geradenstücke mit den Eckpunkten des Dreiecks und fällen die Lote von p auf die Seiten a, b, c. Bei p stoßen nun also sechs Dreiecke aneinander. Zeigen Sie, dass für mindestens eines davon der Winkel bei p mindestens $\frac{\pi}{3}$ groß ist. Benutzen Sie nun den Winkel-Kosinus-Satz um zu zeigen, dass der Abstand von p zu jeder Seite a, b, c nach oben beschränkt ist durch $\frac{1}{2}\log 3$. 3 P

(iv) Beweisen Sie die Hauptaussage der Aufgabe, siehe oben. 1 P