Prof. Dr. B. Wilking
Dr. A. Wörner

SoSe 2011

9. Hausaufgabenblatt zur elementaren Differentialgeometrie

(**Abgabe:** bis Donnerstag 9.6.2011, 10:15 Uhr in die Zettelkästen im Hörsaalgebäude)

Aufgabe 9.1 (4 Punkte)

Wir betrachten hyperbolische Dreiecke in der hyperbolischen Ebene. Zeigen Sie:

(i) Die Mittelsenkrechten eines hyperbolischen Dreiecks schneiden sich im allgemeinen nicht. Folgern Sie, dass es hyperbolische Dreiecke ohne Umkreis gibt (im Gegensatz zum Inkreis, der gemäß Aufgabe 8.3 immer existiert). 2 P

(ii) Wenn sich zwei der Mittelsenkrechten schneiden, dann schneiden sich alle drei in einem Punkt, dem Mittelpunkt des Umkreises. 2 P

Aufgabe 9.2 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass sowohl im Poincaré-Scheibenmodell $\mathbb{E}$ als auch im Halbebenenmodell $\mathbb{H}$ der hyperbolischen Ebene gilt: Hyperbolische Kreise entsprechen Euklidischen Kreisen, d. h.: Zu jedem Punkt $p \in H$ und Radius $r > 0$ gibt es einen Punkt $\hat{p} \in H$ und einen Radius $\hat{r} > 0$, so dass

$$K_{\text{hyp}} = \{x \in H \mid d_{\text{hyp}}(x, p) = r\} = \{x \in H \mid d_{\text{Eukl}}(x, \hat{p}) = \hat{r}\} = K_{\text{Eukl}}$$

gilt. Dabei ist $H \in \{\mathbb{E}, \mathbb{H}\}$.

Hinweis: Zeigen Sie dies zunächst im Scheibenmodell für Kreise mit speziellem Mittelpunkt.

Aufgabe 9.3 (4 Punkte)

Wie in der Vorlesung definiert, werde jeder Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ die Abbildung $m_A \colon \mathbb{C} \setminus \{-d/c\} \to \mathbb{C}\,,\ z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ zugeordnet. Zeigen Sie:

(i) $m_E = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$, wobei E die Einheitsmatrix bezeichnet. 1 P

(ii) $m_A \circ m_B = m_{AB}$. 3 P

Aufgabe 9.4 (4 Punkte)

Wir betrachten das Poincaré-Modell $\mathbb{E}$ der hyperbolischen Ebene. Zeigen Sie, dass die Gruppe der Isometrien transitiv auf der Menge der hyperbolischen Geraden wirkt, d. h.: Zu je zwei verschiedenen hyperbolischen Geraden G, H gibt es eine Isometrie $\sigma \colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ mit $\sigma(G) = H$.

Hinweise: Überlegen Sie sich, dass man ohne Einschränkung annehmen kann, dass H durch den Ursprung geht. Beachten Sie außerdem, dass durch zwei verschiedene Punkte in $\mathbb{E}$ genau eine hyperbolische Gerade verläuft.