Prof. Dr. B. Wilking
Dr. A. Wörner

WiSe 2011/12

Übungsaufgaben zur Klausurvorbereitung in der Differentialgeometrie 1

Aufgabe 1. Es seien $R > r > 0$ gegeben. Auf der Peripherie eines Kreises vom Radius r sei ein Punkt p fest gewählt. Nun rolle dieser Kreis innen auf der Peripherie eines Kreises vom Radius R ab. Die entstehende Kurve heißt *Hypozykloide*.
Zeigen Sie, dass die Hypozykloide gegeben ist durch:

$$c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2\,,\; t \mapsto \begin{pmatrix} (R-r)\cos t + r\cos\left(\left(\frac{R}{r}-1\right)t\right) \\ (R-r)\sin t - r\sin\left(\left(\frac{R}{r}-1\right)t\right) \end{pmatrix}$$

Auf welcher Teilmenge des Definitionsbereichs ist c regulär? Bestimmen Sie die orientierte Krümmung $\kappa_o(t)$. Zeigen Sie weiter, dass die Evolute der Hypozykloide wieder eine Hypozykloide ist.

Aufgabe 2.

(i) Geben Sie drei Punkte $A, B, C \in \mathbb{S}^2$ auf der Sphäre derart an, dass alle Winkel des geodätischen Dreiecks $\triangle ABC$ den Wert $\frac{3}{4}\pi$ haben.

(ii) Im Minkowski-Modell der hyperbolischen Ebene $\mathbb{H}^2$ seien die Punkte $p = (1, 1, p_3)$ und $q = (-1, 2, q_3)$ gegeben. Bestimmen Sie p_3, q_3 und die Geodätische, die durch p und q verläuft.

Aufgabe 3. Es sei ein hyperbolisches Dreieck mit Seiten a, b, c gegeben. Die den Seiten a, b, c gegenüberliegenden Winkel seien mit α, β bzw. γ bezeichnet. Es gelte $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\cos\beta = \frac{\tanh c}{\tanh a} \qquad \text{und} \qquad \cos\gamma = \frac{\tanh b}{\tanh a}$$

Aufgabe 4. Es seien M und N differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Zeigen Sie:

(i) Ist M kompakt und $f\colon M \to N$ eine injektive Immersion, so ist f eine Einbettung. (Ist die Kompaktheit von M notwendig?)

(ii) Eine Abbildung $f\colon M \to N$ ist genau dann eine Diffeomorphismus, wenn f eine surjektive Einbettung ist.

Aufgabe 5. Es sei M eine Mannigfaltigkeit. Weiter seien ∇^1, ∇^2 affine Zusammenhänge auf M und $f_1, f_2\colon M \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $f_1 + f_2 = 1$. Zeigen Sie, dass die Konvexkombination $f_1\nabla^1 + f_2\nabla^2$ ein affiner Zusammenhang ist.

Aufgabe 6. Es sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Eine Untermannigfaltigkeit N von M heißt *totalgeodätisch*, wenn jede Geodätische in M, die N berührt, ganz in N verläuft.

(i) Wir bezeichnen mit ∇ den Levi–Civita-Zusammenhang auf N und mit $\bar\nabla$ den auf M. Weiter sei R der Krümmungstensor auf N und $\bar R$ der auf M. Es seien X, Y, Z Vektorfelder auf N und $\bar X, \bar Y, \bar Z$ Vektorfelder auf M mit $X = \bar X|_N$, $Y = \bar Y|_M$, $Z = \bar Z|_N$. Zeigen Sie:

$$\bar\nabla_{\bar X}\bar Y|_N = \nabla_X Y \qquad \text{und} \qquad \bar R(\bar X, \bar Y)\bar Z|_N = R(X, Y)Z$$

Nun sei $\iota\colon M \to M$ ein isometrischer Diffeomorphismus. Zeigen Sie:

(ii) Es gilt $\exp_{\iota(p)}(\iota_* v) = \iota(\exp_p v)$, $p \in M$, $v \in T_pM$.

(iii) Die Fixpunktmenge $\mathrm{Fix}(\iota) = \{x \in M \mid \iota(x) = x\}$ ist eine totalgeodätische Untermannigfaltigkeit von M.

Aufgabe 7. Es sei (M, g) eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie: Es existiert ein $\varepsilon > 0$ derart, dass $\exp_p(B_\varepsilon(0_p))$ für alle $p \in M$ ein Diffeomorphismus aufs Bild ist.

Aufgabe 8. Es sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Weiter seien $c_1, c_2\colon [0,\infty) \to M$ zwei unterschiedliche Geodätische mit $c_1(0) = c_2(0)$. Es gebe ein $a \in (0,\infty)$ mit $c_1(a) = c_2(a)$. Zeigen Sie, dass für $r > a$ weder $c_1|_{[0,r]}$ noch $c_2|_{[0,r]}$ eine minimale Geodätische ist.

Aufgabe 9. Es sei (M, g) eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension n mit positiver Schnittkrümmung. Weiter seien N_1, N_2 kompakte totalgeodätische Untermannigfaltigkeiten der Dimensionen n_1 bzw. n_2.
Zeigen Sie den *Satz von Frankel*: Gilt $n_1 + n_2 \geq n$, so schneiden sich N_1 und N_2.

Hinweis: Argumentieren Sie per Widerspruch: Falls $N_1 \cap N_2 = \varnothing$ ist, so existiert eine minimale Geodätische γ von N_1 nach N_2. Betrachten Sie nun die 2. Variationsformel für ein geeignetes paralleles Vektorfeld längs γ.

Aufgabe 10. Es sei (M, g) eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Schnittkrümmung $K \leq 0$.

(i) Es seien $c\colon [0,1] \to M$ eine Geodätische und $J(t)$ ein Jacobifeld längs c mit $J(0) = 0$.
Zeigen Sie: Die Funktion $f(t) := \|J(t)\|$ ist konvex (d. h. $f''(t) \geq 0 \ \ \forall\, t$) mit $f'(0) = \|J'(0)\|$.

(ii) Folgern Sie: Es gilt $f(1) \geq \|J'(0)\|$ und $\exp_p\colon T_pM \to M$ hat die Eigenschaft

$$\|{\exp_p}_{*u} v\|_g \geq \|v\| \quad \forall\, u, v \in T_pM.$$