Prof. Dr. B. Wilking
Dr. A. Wörner

WiSe 2011/12

10. Hausaufgabenblatt zur Differentialgeometrie 1

(**Abgabe:** bis Donnerstag 22.12.2011, 12:00 Uhr in die Zettelkästen im Hörsaalgebäude)

Aufgabe 10.1 (4 Punkte)

Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen mit einer Riemannschen Metrik g, und ∇ sei die zugehörige kovariante Ableitung von Levi–Civita. Weiter seien $c\colon [a,b] \to U$ eine C^∞-Kurve und $X, Y\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ Vektorfelder längs c. Zeigen Sie:

$$\frac{d}{dt} g_{c(t)}(X(t), Y(t)) = g_{c(t)}\left(\frac{\nabla X}{dt}(t), Y(t)\right) + g_{c(t)}\left(X(t), \frac{\nabla}{dt} Y(t)\right)$$

Anleitung: Zeigen Sie zunächst $A(X,Y) := \frac{d}{dt} g_c(X,Y) - g_c\big(\frac{\nabla}{dt}X, Y\big) - g_c\big(X, \frac{\nabla}{dt}Y\big)$ ist ein Tensor längs c, d. h. neben der Additivität gilt $A(\varphi X, Y) = A(X, \varphi Y) = \varphi A(X,Y)$ für $\varphi \in C^\infty([a,b], \mathbb{R})$. Überlegen Sie sich nun, wieso es genügt die Behauptung für die konstanten Basisvektorfelder $(e_i)_c$ längs c zu zeigen.

Aufgabe 10.2 (4 Punkte)

Es sei $U \subseteq R^n$ offen mit einer Riemannschen Metrik g, und ∇ sei die zugehörige kovariante Ableitung von Levi–Civita. Weiter sei $c\colon [a,b] \to U$ eine C^∞–Kurve. Zeigen Sie:

(i) Sind X, Y parallel längs c, so ist $g(X(t), Y(t))$ konstant in t. 2 P

(ii) Es sei X_i das parallele Vektorfeld längs c mit $X_i(0) = v_i$, $i = 1, \dots, n$, wobei $v_1, \dots, v_n$ eine orthonormale Basis bezüglich $g_{c(0)}$ sei. Weiter sei $Z\colon [a,b] \to U$ ein Vektorfeld längs c und $\theta_i(t) = g(Z(t), X_i(t))$. Dann gilt:

$$\frac{\nabla}{dt} Z(t) = \sum_{j=1}^{n} \theta_i'(t) X_i(t)$$

2 P

Aufgabe 10.3 (4 Punkte)

Es sei ∇ der Levi–Civita-Zusammenhang einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M^n, g). Für $p \in M$ sei $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ eine Basis von T_pM, und Γ_{ij}^k seien die zugehörigen Christoffel-Symbole, also

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Mit $g_{ij} = g\big(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\big)$ seien die lokalen Koeffizienten der Metrik bezeichnet und mit $g^{k\ell}$ die Inverse zu g_{ij}. Folgern Sie aus den Levi–Civita-Gleichungen, dass gilt:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^{n} g^{k\ell} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} g_{j\ell} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{i\ell} - \frac{\partial}{\partial x_\ell} g_{ij}\right)$$

Aufgabe 10.4 (4 Punkte)

Es seien (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, ∇ der zugehörige Levi–Civita-Zusammenhang und $\psi \in C^\infty(M, \mathbb{R})$.

(i) Zeigen Sie, dass es ein eindeutig bestimmtes Vektorfeld $\operatorname{grad}\psi$ auf M gibt mit:

$$\langle \operatorname{grad}\psi, X\rangle = X\psi = \mathrm{d}\psi(X)$$

Das Vektorfeld $\operatorname{grad}\psi$ heißt der *Gradient* von ψ. 1 P

(ii) Nun sei eine weitere Riemannsche Metrik $\tilde{g}$ definiert durch $\tilde{g}(v, w) := e^\psi g(v, w)$ für alle $v, w \in T_pM, p \in M$. Es sei $\tilde{\nabla}$ der Levi–Civita-Zusammenhang zu $\tilde{g}$. Zeigen Sie:

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \frac{1}{2}\big((X\psi)Y + (Y\psi)X - g(X, Y)\operatorname{grad}\psi\big)$$

Hierbei bezeichnet $\operatorname{grad}\psi$ den Gradienten bezüglich g. 3 P