Prof. Dr. B. Wilking
Dr. A. Wörner

WiSe 2011/12

11. Hausaufgabenblatt zur Differentialgeometrie 1

(**Abgabe:** bis Donnerstag 12.1.2012, 12:00 Uhr in die Zettelkästen im Hörsaalgebäude)

Aufgabe 11.1 (4 Punkte)

Es sei (M^n, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, ∇ der Levi–Civita-Zusammenhang und $p \in M$. Für jede C^∞-Kurve $c\colon [a,b] \to M$ mit $c(a) = c(b) = p$ definiert der Paralleltransport von $c(a)$ nach $c(b)$ eine Abbildung $T_pM \to T_pM$. Die Menge aller solcher Abbildungen bezeichnen wir mit Hol_p.

(i) Zeigen Sie, dass Hol_p eine Untergruppe der $O(n)$ ist, die sogenannte *Holonomiegruppe*. 3 P

(ii) Bestimmen Sie Hol_p für $M^n = \mathbb{S}^n$. 1 P

Aufgabe 11.2 (4 Punkte)

Es seien (M^m, g) und (N^n, h) Riemannsche Mannigfaltigkeiten, und es sei $K = M \times N$ die Produktmannigfaltigkeit, versehen mit der Produktmetrik.

(i) Bestimmten Sie $\nabla_X Y$ für zwei Vektorfelder X, Y auf K, wobei ∇ der Levi-Civita-Zusammenhang von K ist. 2 P

(ii) Charakterisieren Sie die Geodätischen von K. 2 P

(iii) Bestimmen Sie den Krümmungstensor R von K. 1 P

Aufgabe 11.3 (4 Punkte)

(i) Es sei $\mathbb{R}^{n,1}$ der Minkowski-Raum und $M \subset \mathbb{R}^{n,1}$ eine raumartige Riemannsche Untermannigfaltigkeit. Zeigen Sie: Sind $\bar{X}, \bar{Y}$ Vektorfelder auf $\mathbb{R}^{n,1}$ und $X = \bar{X}|_M, Y = \bar{Y}|_M$, so gilt
$$\nabla_X Y = (D_{\bar{X}} \bar{Y})^T$$
wobei ∇ der Levi-Civita-Zusammenhang auf M, D der Levi-Civita-Zusammenhang auf $\mathbb{R}^{n+1}$ (und damit der auf $\mathbb{R}^{n,1}$) und $v \mapsto v^T$ die Projektion auf den Tangentialraum von M ist. 2 P

(ii) Es sei $p \in \mathbb{H}^2 \subset \mathbb{R}^{2,1}$ und $v \in T_p\mathbb{H}^2$ mit $<< v, v >>= 1$. Zeigen Sie für die Kurve
$$c(t) := \cosh(t)p + \sinh(t)v$$
daß $c''(t) \perp T_{c(t)}\mathbb{H}^2$. Folgern Sie mittels (i), daß c eine Geodätische von $\mathbb{H}^2$ ist. 2 P