Prof. Dr. B. Wilking
Dr. A. Wörner

WiSe 2011/12

12. Hausaufgabenblatt zur Differentialgeometrie 1

(**Abgabe:** bis Donnerstag 19.1.2012, 12:00 Uhr in die Zettelkästen im Hörsaalgebäude)

Aufgabe 12.1 (4 Punkte)

Es sei $c\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine wegparametrisierte C^∞-Kurve. Weiter sei $c_s\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine Variation von c. Wir bezeichnen mit $S(t) = \frac{d}{ds}c_s(t)\big|_{s=0}$ das zugehörige Variationsfeld.

Zeigen Sie, dass für das Längenfunktional L folgende *Variationsformel* gilt:

$$\frac{d}{ds}L(c_s)\Big|_{s=0} = \langle S(t), c'(t)\rangle\big|_a^b - \int_a^b \langle S(t), c''(t)\rangle dt$$

Aufgabe 12.2 (4 Punkte)

Für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definieren wir:

$$\exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

Zeigen Sie zunächst, dass die Reihe für jedes A konvergiert. 1 P

Nun benutzen wir ohne weiteren Beweis folgende Tatsachen (E bezeichne die Einheitsmatrix):

Es ist $SO(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid AA^t = E\,,\ \det A = 1\}$ eine Untermannigfaltigkeit von $GL(n,\mathbb{R})$. Es sei $P \in SO(n)$. Der Tangentialraum bei P ist gegeben durch $T_PSO(n) = \{PA \mid A \in \mathbb{R}^{n\times n}\,,\ A^t = -A\}$. Wir versehen $\mathbb{R}^{n\times n}$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB^t)$$

und $SO(n)$ mit der daraus induzierten Metrik. Zeigen Sie:

(i) Die Abbildung $SO(n) \to SO(n)\,,\ X \mapsto AX$ ist eine Isometrie, $A \in SO(n)$. 1 P

(ii) Die Geodätischen von $(SO(n), g)$ durch E sind genau die folgenden Kurven:

$$c_X\colon \mathbb{R} \to SO(n)\,,\ t \mapsto \exp(tX) \qquad ,\ X \in T_ESO(n)$$

2 P

Hinweis: Zu zeigen ist $c_X''(t) \perp T_{c_X(t)}SO(n) = c_X(t)\cdot T_ESO(n)$.

Aufgabe 12.3 (4 Punkte)

Diese Aufgabe erweitert Aufgabe 10.4 (ii).

Es seien (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, $\psi \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ und $\tilde g(v,w) := e^\psi g(v,w)$ für alle $v,w \in T_pM$, $p \in M$. Weiter seien ∇, $\tilde\nabla$ die Levi–Civita-Zusammenhänge zu g bzw. $\tilde g$ und R bzw. $\tilde R$ seien die zugehörigen Krümmungstensoren. Schließlich seien $\operatorname{grad}\psi$ der Gradient und $h_\psi(X,Y) = g(\nabla_X \operatorname{grad}\psi, Y)$ die zur Hesseschen gehörige Zweiform von ψ bezüglich der Metrik g.

Zeigen Sie:

(i) h_ψ ist symmetrisch: $h_\psi(X,Y) = h_\psi(Y,X)$.

(ii)

$$\begin{aligned} g(\tilde{R}(x,y)y,x) &= g(R(x,y)y,x) \\ &-\frac{1}{2}\left(h_\psi(x,x)\|y\|_g^2 - 2h_\psi(x,y)g(x,y) + h_\psi(y,y)\|x\|_g^2\right) \\ &-\frac{1}{4}\left(\|x\|_g^2\|y\|_g^2 - g(x,y)^2\right)\|\operatorname{grad}\psi\|_g^2 \\ &+\frac{1}{4}\left((y\psi)^2\|x\|_g^2 - 2(x\psi)(y\psi)g(x,y) + (x\psi)^2\|y\|_g^2\right) \end{aligned}$$

Aufgabe 12.4 (4 Punkte)

(i) Es sei $M = \mathbb{S}^n \setminus e_{n+1}$ die Einheitssphäre ohne Nordpol. Versehen wir M mit der durch die stereographische Projektion induzierten Riemannschen Metrik g (vgl. Aufgabe 9.2), so ist $g_{ij}(x) = \frac{4\delta_{ij}}{(\|x\|^2+1)^2}$ [Korrektur: Quadrat im Nenner]. Bestimmen Sie den Riemannschen Krümmungstensor R.

(ii) Es sei $\mathbb{E}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$ das Poincaré-Modell des hyperbolischen Raumes. Dann ist $(\mathbb{E}^n, g)$ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit $g_{ij}(x) = \frac{4\delta_{ij}}{(1-\|x\|^2)^2}$. Bestimmen Sie den Riemannschen Krümmungstensor R.