Prof. Dr. B. Wilking
Dr. A. Wörner

WiSe 2011/12

2. Hausaufgabenblatt zur Differentialgeometrie 1

(**Abgabe:** bis Donnerstag 27.10.2011, 12:00 Uhr in die Zettelkästen im Hörsaalgebäude)

Aufgabe 2.1 (4 Punkte)

Es seien $\varepsilon > 0$ und $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Zeigen Sie, dass es eine differenzierbar geschlossene Kurve $c\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^n$ der Länge $L(c) = 2\pi + \varepsilon$ gibt, die in keinem abgeschlossenen Halbraum von $\mathbb{R}^{n+1}$ enthalten ist.

Aufgabe 2.2 (4 Punkte)

Es sei $c\colon [0, L] \to \mathbb{R}^n$ eine reguläre, wegparametrisierte C^2-Kurve. Weiterhin gebe es ein $R > 0$ mit $\|c(t)\| \leq R$ für alle $t \in [0, L]$. Die Krümmung von c sei κ_c.

(i) Zeigen Sie:
$$\int_0^L \kappa_c(t)dt \geq \frac{L}{R} - 2$$
2 P

(ii) Nun sei c zusätzlich differenzierbar geschlossen. Zeigen Sie:
$$\int_0^L \kappa_c(t)dt \geq \frac{L}{R}$$
2 P

Hinweis: Setzen Sie $f(t) = \langle \dot{c}(t), c(t) \rangle$ und überlegen Sie sich für (i) zunächst $\int\limits_0^L f'(t)dt \leq 2R$.

Aufgabe 2.3 (4 Punkte)

Es sei I ein Intervall und $c\colon I \to \mathbb{R}^n$ eine reguläre wegparametrisierte C^2-Kurve, $n \in \mathbb{N}$. Es gelte $\|c(t)\| \leq R$ für alle $t \in I$ und ein festes $R > 0$. Mit anderen Worten, die Kurve c verläuft innerhalb der abgeschlossenen n-dimensionalen Kugel mit Radius R um den Ursprung. Es gebe ein $t_0 \in I$ mit $\|c(t_0)\| = R$, d. h. in t_0 berühre die Kurve c den Rand der Kugel.

Zeigen Sie:
$$\kappa_c(t_0) \geq \frac{1}{R}$$

Aufgabe 2.4 (4 Punkte)

Es sei I ein Intervall und $c\colon I \to \mathbb{R}^2$ eine reguläre, ebene C^4-Kurve, deren Krümmung κ_c nirgends verschwindet. Hat die Krümmung bei $t_0 \in I$ ein isoliertes lokales Extremum, so nennt man $c(t_0)$ einen *Scheitelpunkt* der Kurve c.

Zeigen Sie: Es gibt ein $\delta > 0$ derart, dass für das Tangentialfeld der Evolute m_c (vgl. Aufgabe 1.3) folgendes gilt:
$$m_c'(t) \neq 0 \ \ \forall\, t \in [t_0 - \delta, t_0) \cup (t_0, t_0 + \delta]$$
Zeigen Sie weiter, dass folgende Gleichung gilt (insbesondere existieren beide Seiten):
$$\lim_{t \nearrow t_0} \frac{m_c'(t)}{\|m_c'(t)\|} = - \lim_{t \searrow t_0} \frac{m_c'(t)}{\|m_c'(t)\|}$$

Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 1.3 (i).