Prof. Dr. B. Wilking
Dr. A. Wörner

WiSe 2011/12

3. Hausaufgabenblatt zur Differentialgeometrie 1

(**Abgabe:** bis Donnerstag 3.11.2011, 12:00 Uhr in die Zettelkästen im Hörsaalgebäude)

Aufgabe 3.1 (4 Punkte)

Zur Erinnerung: Eine Teilmenge $C \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *konvex*, falls gilt: Sind $p, q \in C$, so ist auch $tp + (1-t)q \in C$ für alle $t \in [0,1]$.

Zeigen Sie den folgenden Spaltungssatz: Ist $C \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und konvex und enthält C die x_1-Achse, so gibt es eine abgeschlossene konvexe Menge $C' \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ mit:

$$C = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \in \mathbb{R}\,,\ (x_2, \ldots, x_n) \in C'\}$$

Mit anderen Worten, C spaltet als $C = \mathbb{R} \times C'$.

Hinweis: Betrachten Sie für $x \in C$ die Strecken von x nach te_1 und nach $-te_1$ für $t \to \infty$.

Aufgabe 3.2 (4 Punkte)

Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene Teilmenge, $n \in \mathbb{N}$. Wir versehen M mit der induzierten Metrik und bezeichnen sie als d_M.

(i) Zeigen Sie: Ist (M, d_M) ein innerer metrischer Raum, so ist M eine konvexe Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. 3 P

(ii) Zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass die Implikation nicht mehr gilt, wenn M nicht abgeschlossen in $\mathbb{R}^n$ ist. 1 P

Aufgabe 3.3 (8 Punkte)

Es sei (X, d) ein metrischer Raum und $c\colon [a,b] \to X$ eine stetige rektifizierbare Kurve. Zeigen Sie:

(i) Es gilt die verallgemeinerte Dreiecksungleichung $L(c) \geq d(c(a), c(b))$. 1 P

(ii) Es gilt die Additivität $L(c|_{[a,s]}) + L(c|_{[s,b]}) = L(c)$ für jedes $s \in [a,b]$. 1 P

(iii) Die Funktion $[a,b] \to \mathbb{R}\,,\ t \mapsto L(c|_{[a,t]})$ ist monoton wachsend. 1 P

(iv) Die Funktion aus (iii) ist stetig. 2 P

(v) Es sei $(c_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge stetiger rektifizierbarer Kurven mit $c_i\colon [a,b] \to X$ für alle i. Konvergiert die Folge punktweise gegen c, so gilt $\liminf_{i\to\infty} L(c_i) \geq L(c)$. 2 P

(vi) Im allgemeinen gilt in (v) nicht Gleichheit. Skizzieren Sie ein Gegenbeispiel. 1 P

Hinweise: Bei (iv) wähle man eine Unterteilung von $[a,b]$ derart, dass sich die Länge des zugehörigen Polygonzuges und $L(c)$ um höchstens $\frac{\varepsilon}{2}$ unterscheiden (warum geht das?). Man überlege sich, dass dies dann auch auf jedem Teilintervall von $[a,b]$ gilt. Nun nutze man die Stetigkeit von c selbst aus.

Bei (v) ist zu zeigen, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $L(c) \leq L(c_i) + \varepsilon$ für alle $i \geq N$ gilt. Dazu wähle man wieder eine Unterteilung ähnlich wie in (iv). Nun nutze man die punktweise Konvergenz an den Unterteilungsstellen aus – dies sind endlich viele!

Bei (vi) mag eine Karte von Manhattan helfen.