Prof. Dr. B. Wilking
Dr. A. Wörner WiSe 2011/12

4. Hausaufgabenblatt zur Differentialgeometrie 1

(**Abgabe:** bis Donnerstag 10.11.2011, 12:00 Uhr in die Zettelkästen im Hörsaalgebäude)

Aufgabe 4.1 (4 Punkte)

Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Für $z \in X$ und $r > 0$ ist die offene Kugel mit Mittelpunkt z und Radius r definiert als $B_r(z) = \{x \in X \mid d(x, z) < r\}$.

(i) Zeigen Sie, dass für den Abschluss einer offenen Kugel im allgemeinen nicht $\overline{B_r(z)} = \{x \in X \mid d(x, z) \leq r\}$ gilt. Geben Sie ein Gegenbeispiel dazu an. Gilt zumindest eine der Implikationen "$\subseteq$" oder "$\supseteq$"? 2 P

(ii) Wie lauten die Antworten zu (i), wenn (X, d) ein innerer metrischer Raum ist? Beweisen Sie Ihre Behauptung. 2 P

Aufgabe 4.2 (6+2* Punkte)

Es sei (X, d) ein metrischer Raum und $p, q \in X$. Ein Punkt $m \in X$ heißt *Mittelpunkt von p und q*, wenn gilt: $2d(p, m) = 2d(q, m) = d(p, q)$. Für ein festes $\varepsilon > 0$ heißt m ein *ε-Mittelpunkt von p und q*, wenn gilt: $|2d(p, m) - d(p, q)| \leq \varepsilon$ und $|2d(q, m) - d(p, q)| \leq \varepsilon$.

Zeigen Sie:

(i) Ist (X, d) geodätisch, so existiert für alle $p, q \in X$ ein Mittelpunkt. 1 P

(ii) Ist (X, d) inner metrisch, so existiert für alle $p, q \in X$ ein ε-Mittelpunkt für jedes $\varepsilon > 0$. 2 P

(iii) Ist (X, d) vollständig (d. h. jede Cauchy-Folge konvergiert), so gilt die Umkehrung der Aussage (i). 3 P

(iv) (freiwillig) Ist (X, d) vollständig, so gilt auch die Umkehrung der Aussage (ii). 2* P

Hinweis: Um die Umkehrung von (i) zu zeigen, seien $p, q \in X$ und $d(p, q) = L$. Konstruieren Sie eine L-Lipschitz-Abbildung $c\colon [0, 1] \to X$ mit $c(0) = p$, $c(1) = q$, indem Sie c zunächst auf einer abzählbaren, dichten Teilmenge von $[0, 1]$ definieren.

Aufgabe 4.3 (6 Punkte)

Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Für $Y \subseteq X$ und $r > 0$ definieren wir die r-Umgebung von Y wie folgt:

$$U_r(Y) := \bigcup_{y \in Y} B_r(y) = \{x \in X \mid \exists\, y \in Y : d(x, y) < r\}$$

Sind nun Teilmengen $A, B \subseteq X$ gegeben, so definieren wir ihren *Hausdorff-Abstand* d_H durch:

$$d_H(A, B) = \inf\{r > 0 \mid A \subseteq U_r(B) \text{ und } B \subseteq U_r(A)\}$$

Zeigen Sie:

(i) d_H ist eine Pseudometrik auf der Potenzmenge von X, d. h. d_H erfüllt alle Axiome einer Metrik (wobei wir auch zulassen, dass eine Metrik den Wert ∞ annimmt) bis auf die Einschränkung, dass $d_H(A, B) = 0$ nicht $A = B$ impliziert. 2 P

(ii) Ist $A \subseteq X$ und bezeichnet $\bar{A}$ den Abschluss von A in X, so gilt $d_H(A, \bar{A}) = 0$. 2 P

(iii) Sind $A, B \subseteq X$ abgeschlossen und gilt $d_H(A, B) = 0$, so folgt $A = B$. Somit ist d_H eine Metrik auf dem Raum aller abgeschlossenen Teilmengen von X. 2 P