Prof. Dr. B. Wilking
Dr. A. Wörner

WiSe 2011/12

# 5. Hausaufgabenblatt zur Differentialgeometrie 1

(**Abgabe:** bis Donnerstag 17.11.2011, 12:00 Uhr in die Zettelkästen im Hörsaalgebäude)

**Aufgabe 5.1** (4 Punkte)

Es sei $(X, d)$ ein vollständiger innerer metrischer Raum. Weiter seien $A \subseteq X$ eine abgeschlossene und $K \subseteq X$ eine kompakte Teilmenge. Wir definieren:

$$\operatorname{dist}(A, K) := \inf\{d(a, k) \mid a \in A, k \in K\}$$

Zeigen Sie:

(i) Ist $(X, d)$ lokalkompakt, so gibt es Punkte $p \in A, q \in K$, die den Abstand $\operatorname{dist}(A, K)$ realisieren, also $d(p, q) = \operatorname{dist}(A, K)$. 2 P

(ii) Die Lokalkompaktheit in (i) ist auch dann notwendig, wenn $(X, d)$ ein vollständiger geodätischer Raum ist. 2 P

**Aufgabe 5.2** (4 Punkte)

Es sei $(X, d)$ ein metrischer Raum. Wir versehen die Menge $\mathcal{A}(X)$ aller abgeschlossenen Teilmengen von $X$ mit der Hausdorff-Metrik $d_H$, siehe Aufgabe 4.3.

(i) Eine Folge $(A_i) \subseteq \mathcal{A}(X)$ konvergiere in $(\mathcal{A}(X), d_H)$ gegen $A$. Zeigen Sie, dass $A$ die Menge aller Limites von konvergierenden Folgen $(a_i) \subseteq X$ ist mit $a_i \in A_i \ \ \forall i \in \mathbb{N}$. 2 P

(ii) Nun sei $X$ kompakt, und $(A_i) \subseteq \mathcal{A}(X)$ eine Folge. Zeigen Sie:

(a) Gilt $A_{i+1} \subseteq A_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$, so konvergiert die Folge in $(\mathcal{A}(X), d_H)$ gegen $\bigcap_i A_i$. 1 P

(b) Gilt $A_{i+1} \supseteq A_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$, so konvergiert die Folge in $(\mathcal{A}(X), d_H)$ gegen $\overline{\bigcup_i A_i}$. 1 P

**Aufgabe 5.3** (4 Punkte)

Es seien $X$ und $Y$ metrische Räume. Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt *Isometrie*, wenn für alle $p, q \in X$ gilt $d(f(p), f(q)) = d(p, q)$.

Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt *lokale Isometrie*, wenn es zu jedem $x \in X$ eine offene Kugel $B_r(x)$ gibt, so dass die Abbildung $f|_{B_r(x)}\colon B_r(x) \to f(B_r(x))$ eine Isometrie ist.

Nun seien $X$ und $Y$ innere metrische Räume und $f\colon X \to Y$ eine lokale Isometrie. Zeigen Sie, dass $f$ eine 1-Lipschitz-Abbildung ist, aber im allgemeinen keine Isometrie.

**Aufgabe 5.4** (4 Punkte)

Wir betrachten $\mathbb{H}^2 \subseteq \mathbb{R}^{2,1}$, also die hyperbolische Ebene im Minkowski-Modell. Es seien die Punkte $p = \sinh 3e_1 + \cosh 3e_3$ und $q = \sinh 2e_2 + \cosh 2e_3$ gegeben.

(i) Berechnen Sie die Geodätische von $p$ nach $q$. 1 P

(ii) Stellen Sie die Formel für die Geodätische von $p$ in Richtung $e_2$ auf. 1 P

(iii) Geben Sie eine Matrix $A \in O_+(2, 1)$ an mit $Ap = q$. 2 P