Prof. Dr. B. Wilking
Dr. A. Wörner WiSe 2011/12

6. Hausaufgabenblatt zur Differentialgeometrie 1

(**Abgabe:** bis Donnerstag 24.11.2011, 12:00 Uhr in die Zettelkästen im Hörsaalgebäude)

Aufgabe 6.1 (4 Punkte)

Ein Flugzeug fliege auf kürzestem Weg (bei vernachlässigbarer Flughöhe) von New York City nach Moskau. Die geografische Lage New Yorks ist 40° 43' Nord, 74° 0' West, die Moskaus ist 55° 45' Nord, 37° 37' Ost. Welches ist der nördlichste Breitenkreis, den das Flugzeug erreicht?

Aufgabe 6.2 (4 Punkte)

Es sei ein hyperbolisches Dreieck mit Seitenlängen a, b, c und Winkeln α, β, γ gegeben.

(i) Es seien $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$. Berechnen Sie α, β, γ. 1 P

(ii) Es seien $a = 1$, $\beta = \frac{\pi}{3}$, $\gamma = \frac{\pi}{5}$. Berechnen Sie α, b, c. 1 P

(iii) Berechnen Sie die Längen der Höhen und Seitenhalbierenden der Dreiecke aus (i) und (ii). 2 P

Aufgabe 6.3 (4 Punkte)

Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $X \in \{\mathbb{S}^n, \mathbb{H}^n\}$. Es seien 3 Punkte $p_1, p_2, p_3 \in X$ gegeben. Weiter seien $q_1, q_2, q_3 \in X$ derart gegeben, dass $d(p_i, p_j) = d(q_i, q_j)$ gilt für alle i, j. Zeigen Sie:

(i) Ist $X = \mathbb{S}^n$, so gibt es eine Matrix $A \in O(n+1)$ mit $Ap_i = q_i$, $i = 1, 2, 3$. 2 P

(ii) Ist $X = \mathbb{H}^n$, so gibt es eine Matrix $A \in O_+(n, 1)$ mit $Ap_i = q_i$, $i = 1, 2, 3$. 2 P

Aufgabe 6.4 (4 Punkte)

Leiten Sie aus dem Seitenkosinussatz in M^2_κ den Kosinussatz der Euklidischen Geometrie her.

Anleitung: Betrachten Sie eine Folge (κ_n) mit $\kappa_n \neq 0 \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}$ und $\kappa_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. In den Räumen $M^2_{\kappa_n}$ mit konstanter Krümmung κ_n seien geodätische Dreiecke mit den festen Seitenlängen a, b und dem festen Winkel γ gegeben. Die dritte Seitenlänge sei mit c_n bezeichnet, und es gilt nach dem Seitenkosinussatz:

$$\mathrm{cs}_{\kappa_n}(c_n) = \mathrm{cs}_{\kappa_n}(a) \cdot \mathrm{cs}_{\kappa_n}(b) + \kappa_n \cdot \mathrm{sn}_{\kappa_n}(a) \cdot \mathrm{sn}_{\kappa_n}(b) \cdot \cos\gamma \qquad (*)$$

Zu zeigen ist, dass die Folge (c_n) gegen ein c_∞ konvergiert, welches

$$c^2_\infty = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma$$

erfüllt. Betrachten Sie dazu die Taylorentwicklung der Gleichung $(*)$ nach $\sqrt{\kappa_n}$ bzw. $\sqrt{-\kappa_n}$.