Prof. Dr. B. Wilking
Dr. A. Wörner

WiSe 2011/12

7. Hausaufgabenblatt zur Differentialgeometrie 1

(**Abgabe:** bis Donnerstag 1.12.2011, 12:00 Uhr in die Zettelkästen im Hörsaalgebäude)

Aufgabe 7.1 (8 Punkte)

Es sei M ein topologischer Raum. Eine Überdeckung $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ von M heißt *lokal endlich*, wenn zu jedem $p \in M$ eine Umgebung U von p existiert, so dass $\#\{\alpha \in A \,|\, U_\alpha \cap U \neq \emptyset\} < \infty$ gilt. Eine Überdeckung $\left(V_\beta\right)_{\beta\in B}$ heißt *Verfeinerung* von $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$, wenn zu jedem $\beta \in B$ ein $\alpha \in A$ existiert mit $V_\beta \subset U_\alpha$.

Nun sei M ein lokalkompakter Hausdorff-Raum mit abzählbarer Basis der Topologie. Zeigen Sie:

(i) Es gibt eine Basis $\{G_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ der Topologie, so dass alle $\bar{G}_i$ kompakt sind. 2 P

(ii) Es gibt eine Folge kompakter Mengen $(C_i)_{i\in\mathbb{N}}$, so dass $C_i \subset \mathring{C}_{i+1}$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und $\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i = M$ gilt. 2 P

(iii) Ist $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ eine beliebige **Korrektur: offene** Überdeckung von M und $i \in \mathbb{N}$, so gibt es offene Mengen $V_{i1}, \ldots, V_{ir_i}$ mit:
   (a) $C_i \setminus \mathring{C}_{i-1} \subset V_{i1} \cup \ldots \cup V_{ir_i}$,
   (b) für alle i und ρ existiert ein α mit $V_{i\rho} \subset U_\alpha$,
   (c) für alle ρ gilt $V_{i\rho} \subset \mathring{C}_{i+1} \setminus C_{i-2}$, wobei $C_i = \emptyset$ für $i \leq 0$ gesetzt wird. 2 P

(iv) M ist *parakompakt*, d. h. jede offene Überdeckung $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ von M besitzt eine lokal endliche Verfeinerung $(V_\beta)_{\beta\in B}$. 2 P

Aufgabe 7.2 (8 Punkte)

Es seien M eine differenzierbare n–dimensionale Mannigfaltigkeit, $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ eine offene Überdeckung von M und $J_\nu := (-\nu, \nu)^n \subset \mathbb{R}^n$. Schließen Sie ähnlich wie in Aufgabe 7.1:

(i) Es gibt eine lokal endliche Verfeinerung $(W_\beta)_{\beta\in B}$ und Karten $x_\beta : W_\beta \to J_3$ derart, dass $M = \bigcup_{\beta\in B} x_\beta^{-1}(J_1)$ gilt. 2 P

(ii) Es gibt eine C^∞-Funktion $\psi\colon \mathbb{R}^n \to [0, 1]$ mit

$$\psi|_{J_1} = 1, \quad \psi|_{\mathbb{R}^n\setminus J_2} = 0.$$

2 P

(iii) Es gibt eine Familie $(\varphi_\alpha)_{\alpha\in A}$ reellwertiger, nichtnegativer differenzierbarer Funktionen auf M, so dass gilt:
   (a) $(\operatorname{supp} \varphi_\alpha)_{\alpha\in A}$ ist eine lokal endliche Überdeckung mit $\operatorname{supp}(\varphi_\alpha) \subset U_\alpha$.
   (b) $\sum_{\alpha\in A} \varphi_\alpha(p) = 1 \quad \forall\, p \in M$. 2 P

(iv) Sei $G \subset M$ offen und $A \subset G$ abgeschlossen in M. Betrachten Sie die Überdeckung $G \cup (M \setminus A)$ und zeigen Sie unter Verwendung von (iii):
   (a) Es gibt ein $\varphi \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ mit $0 \leq \varphi \leq 1$, $\varphi|_A = 1$, $\operatorname{supp}(\varphi) \subset G$.
   (b) Ist $f \in C^\infty(G, \mathbb{R})$, so gibt es ein $g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ mit $f|_A = g|_A$ und $\operatorname{supp}(g) \subset G$. 2 P

Allgemeiner Hinweis:

Alle Studierenden seien daran erinnert, sich im QISPOS zu ihren Kursen anzumelden innerhalb des dafür vorgesehenen Zeitraums (3. bis 10. Semesterwoche).