Prof. Dr. B. Wilking
Dr. A. Wörner WiSe 2011/12

8. Hausaufgabenblatt zur Differentialgeometrie 1

(**Abgabe:** bis Donnerstag 8.12.2011, 12:00 Uhr in die Zettelkästen im Hörsaalgebäude)

Aufgabe 8.1 (5 Punkte)

(i) Es seien X und Y metrische Räume mit $\mathrm{diam}(X) < \infty$. Zeigen Sie, dass für den Gromov–Hausdorff-Abstand gilt: $d_{GH}(X,Y) \geq \frac{1}{2}|\mathrm{diam}(X) - \mathrm{diam}(Y)|$ 1 P

(ii) Es seien (X_n) eine Folge metrischer Räume und $X = \{x_1, \dots, x_N\}$ ein endlicher metrischer Raum. Zeigen Sie, dass $X_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} X$ bezüglich des Gromov–Hausdorff-Abstandes genau dann gilt, wenn folgendes erfüllt ist: Für fast alle $n \in \mathbb{N}$ lässt sich X_n schreiben als disjunkte Vereinigung nichtleerer Mengen $X_{n,1}, \dots, X_{n,N}$, so dass für alle i, j gilt:

$$\mathrm{diam}(X_{n,i}) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \text{und} \qquad \mathrm{dist}(X_{n,i}, X_{n,j}) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} d(x_i, x_j)$$

Dabei ist $\mathrm{diam}(A) = \sup\{d(a,a') \mid a, a' \in A\}$, $\mathrm{dist}(A,B) = \inf\{d(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$. 4 P

Aufgabe 8.2 (6 Punkte)

Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit einem Atlas $\mathfrak{A}$. Es bezeichne $\pi\colon TM \to M$ die Projektion. Ist $x : U \to V \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Karte in $\mathfrak{A}$, so definieren wir die sogenannte zugehörige *Bündelkarte* durch:

$$\bar{x}\colon \pi^{-1}(U) \to V \times \mathbb{R}^n\,,\ v \mapsto \big(x(\pi(v)), (v(x_1), \dots, v(x_n))\big)$$

Für $V \subseteq TM$ definieren wir

$$V \text{ offen } :\Longleftrightarrow\ \bar{x}(\pi^{-1}(U) \cap V) \subseteq \mathbb{R}^{2n} \text{ ist offen für alle Karten } x\colon U \to V \text{ in } \mathfrak{A}.$$

Zeigen Sie, dass hierdurch tatsächlich eine Topologie definiert wird und TM zusammen mit dem Bündelatlas $\bar{\mathfrak{A}} := \{\bar{x} \mid x \in \mathfrak{A}\}$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist. Wieso ist für eine differenzierbare Abbildung $f\colon M \to N$ die induzierte Abbildung $f_*\colon TM \to TN$ differenzierbar?

Aufgabe 8.3 (5 Punkte)

Es sei M eine n-dimensionale C^k-Mannigfaltigkeit mit $k \geq 1$ und $p \in M$. Wir setzen

$$\mathcal{K}_p(M) := \{\alpha\colon (-\varepsilon,\varepsilon) \to M \mid \alpha \text{ ist } C^k,\ \varepsilon > 0 \text{ und } \alpha(0) = p\}$$

und definieren auf $\mathcal{K}_p(M)$ eine Äquivalenzrelation wie folgt:

$$\alpha \sim \beta\ :\Longleftrightarrow\ (x \circ \alpha)'(0) = (x \circ \beta)'(0) \text{ für eine (dann alle) Karte } (U,x) \text{ um } p$$

Nun definieren wir

$$T_p^{\mathrm{geom}}M := \mathcal{K}_p(M)/\sim$$

als *geometrischen Tangentialraum* an M in p.

Zeigen Sie, dass $T_p^{\mathrm{geom}}M$ ein Vektorraum ist. Zeigen Sie im Falle $k = \infty$, dass für jedes $[\alpha] \in T_p^{\mathrm{geom}}M$ die Abbildung $C^\infty(M,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $f \mapsto (f \circ \alpha)'(0)$ wohldefiniert und eine Derivation ist. Zeigen Sie weiter, dass dies einen Vektorraumisomorphismus $T_p^{\mathrm{geom}}M \to T_pM$ induziert.