Prof. Dr. B. Wilking
Dr. A. Wörner

WiSe 2011/12

9. Hausaufgabenblatt zur Differentialgeometrie 1

(**Abgabe:** bis Donnerstag 15.12.2011, 12:00 Uhr in die Zettelkästen im Hörsaalgebäude)

Aufgabe 9.1 (5 Punkte)

(i) Es bezeichne $e_1 \in \mathfrak{V}(\mathbb{R}^n)$ das Vektorfeld auf $\mathbb{R}^n$, welches konstant gleich $(1, 0, \ldots, 0)^t$ ist. Berechnen Sie $\{Y \in \mathfrak{V}(\mathbb{R}^n) \mid [e_1, Y] = 0\}$. 1 P

(ii) Es seien $X \colon \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto \frac{x}{\|x\|}$ und $Y \colon \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto Jx$, wobei J die Drehung um $90°$ sei. Berechnen Sie $[X, Y]$. 2 P

(iii) Es seien $a, b > 0$ und

$$X \colon \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2 , \; (x_1, x_2) \mapsto \left(\frac{a x_1}{\sqrt{(x_1/a)^2 + (x_2/b)^2}}, \frac{b x_2}{\sqrt{(x_1/a)^2 + (x_2/b)^2}} \right).$$

Finden Sie $Y \in \mathfrak{V}(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ derart, dass erstens $[X, Y] = 0$ gilt und zweitens X_p, Y_p für alle $p \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ linear unabhängig sind. 2 P

Aufgabe 9.2 (4 Punkte)

Es sei $\mathbb{S}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ die Einheitssphäre und $e_{n+1} = (0, \ldots, 0, 1)$ der Nordpol. Wir setzen $M := \mathbb{S}^n \setminus \{e_{n+1}\}$. Die *stereographische Projektion* ist gegeben durch den folgenden Diffeomorphismus:

$$\Phi \colon \mathbb{R}^n \to M , \; u \mapsto \frac{1}{\|u\|^2 + 1}(2u \, , \, \|u\|^2 - 1)$$

Hierbei ist $\| \cdot \|$ die Euklidische Norm. Es sei $p = \Phi(x) \in M$. Für $v, w \in T_pM$ definieren wir

$$g_p(v, w) = \langle v, w \rangle,$$

wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Euklidische Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^{n+1}$ bezeichnet.

Zeigen Sie, dass (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit ist und berechnen Sie die Matrix von g bezüglich der Basis $\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial \Phi}{\partial x_n}(x)$ von T_pM.

Aufgabe 9.3 (3 Punkte)

Es sei (M, g) eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit. Ist $I = [a, b]$ ein Intervall und $c \colon I \to M$ eine C^∞-Kurve, so ist die Länge von c gegeben durch $L(c) = \int_a^b \sqrt{g(c'(t), c'(t))} dt$. Für $x, y \in M$ definieren wir den *Riemannschen Abstand* d_{Riem} wie folgt:

$$d_{\text{Riem}}(x, y) = \inf\{L(c) \mid c \text{ ist } C^\infty\text{-Kurve von } x \text{ nach } y\}$$

Zeigen Sie, dass (M, g, d_{Riem}) ein innerer metrischer Raum ist und die Metrik d_{Riem} dieselbe Topologie induziert, die M als differenzierbare Mannigfaltigkeit bereits trägt.

Aufgabe 9.4 (4 Punkte)

Es sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie, dass eine Riemannsche Metrik $\tilde{g}$ derart existiert, dass $(M, \tilde{g}, d_{\mathrm{Riem}})$ vollständig ist.

Anleitung: Überlegen Sie sich, dass wegen Aufgabe 7.1 (ii) eine Ausschöpfung von M durch kompakte Mengen C_i existiert mit $C_i \subseteq \mathring{C}_{i+1}$. Für jedes $i \in \mathbb{N}$ definieren wir ε_i als den Riemannschen Abstand des Kompaktums C_i zum Rand ∂C_{i+1}. Finden Sie nun eine C^∞-Funktion $f\colon M \to \mathbb{R}$ mit $f|_{M \setminus C_k} \geq \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\varepsilon_i^2}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie schließlich, dass $\tilde{g}_p := f(p) \cdot g_p$ eine vollständige Riemannsche Metrik auf M definiert.