Prof. Dr. B. Wilking
Dr. A. Wörner

WiSe 2011/12

Musterlösung zur Klausurvorbereitung in der Differentialgeometrie 1

Zu Aufgabe 1

Wir nehmen an, dass der Mittelpunkt des großen Kreises im Ursprung liegt. Zum Zeitpunkt $t = 0$ befinde sich der Mittelpunkt des kleinen Kreises auf dem positiven Abschnitt der x-Achse. Der Berührpunkt beider Kreise liegt wegen $r < R$ ebenfalls auf dem positiven Abschnitt der x-Achse und werde als Punkt p gewählt. Nun rolle der kleine Kreis innen auf der Peripherie des großen ab; der kleine Kreis rotiere dabei im Uhrzeigersinn, also erfolgt seine Bewegung entgegen des Uhrzeigersinns.

Die Bahn des Mittelpunktes des kleinen Kreises ist offenbar gegeben durch:

$$t \mapsto \begin{pmatrix} (R-r)\cos t \\ (R-r)\sin t \end{pmatrix}$$

Zum Zeitpunkt t ist der umlaufende Kreis auf dem festen Kreis über eine Bogenlänge von Rt abgerollt. Würde der umlaufende Kreis diese Strecke auf einer Geraden abrollen, wäre er zum Zeitpunkt t um $-\frac{R}{r}t$ gedreht. Da er jedoch auf dem festen Kreis abrollt, addiert sich der Winkel t dazu. Also hat sich der umlaufende Kreis zum Zeitpunkt t um $\left(1 - \frac{R}{r}\right) t$ gedreht. Aufgrund der Wahl von p ergibt sich damit als Bahn von p:

$$t \mapsto \begin{pmatrix} (R-r)\cos t + r\cos\left(\left(1-\frac{R}{r}\right)t\right) \\ (R-r)\sin t + r\sin\left(\left(1-\frac{R}{r}\right)t\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (R-r)\cos t + r\cos\left(\left(\frac{R}{r}-1\right)t\right) \\ (R-r)\sin t - r\sin\left(\left(\frac{R}{r}-1\right)t\right) \end{pmatrix}$$

Nun setzen wir $m := \frac{R}{r} - 1$. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} c(t) &= \begin{pmatrix} mr\cos t + r\cos(mt) \\ mr\sin t - r\sin(mt) \end{pmatrix} \\ \dot{c}(t) &= \begin{pmatrix} -mr\sin t - mr\sin(mt) \\ mr\cos t - mr\cos(mt) \end{pmatrix} \\ \ddot{c}(t) &= \begin{pmatrix} -mr\cos t - m^2r\cos(mt) \\ -mr\sin t + m^2r\sin(mt) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und damit:

$$\begin{aligned} \|\dot{c}(t)\| &= \big(m^2r^2\sin^2 t + 2m^2r^2\sin t\sin(mt) + m^2r^2\sin^2(mt) + \\ &\quad + m^2r^2\cos^2 t - 2m^2r^2\cos t\cos(mt) + m^2r^2\cos^2(mt)\big)^{\frac{1}{2}} \\ &= \big(2m^2r^2 + 2m^2r^2(\sin t\sin(mt) - \cos t\cos(mt))\big)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{2}mr\sqrt{1 + (\sin t\sin(mt) - \cos t\cos(mt))} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle J\dot{c}(t), \ddot{c}(t)\rangle &= m^2r^2\cos^2 t + m^3r^2\cos t\cos(mt) - m^2r^2\cos t\cos(mt) - m^3r^2\cos^2(mt) + \\ &\quad + m^2r^2\sin^2 t - m^3r^2\sin t\sin(mt) + m^2r^2\sin t\sin(mt) - m^3r^2\sin^2(mt) \\ &= m^2r^2\big(1 - m + (1-m)(\sin t\sin(mt) - \cos t\cos(mt))\big) \\ &= m^2r^2(1-m)\big(1 + (\sin t\sin(mt) - \cos t\cos(mt))\big) \end{aligned}$$

$$\kappa_o(t) \;=\; \frac{\langle J\dot{c}(t), \ddot{c}(t)\rangle}{\|\dot{c}(t)\|^3} \;=\; \frac{1-m}{2\|\dot{c}(t)\|}$$

Damit folgt für die Evolute:

$$\begin{aligned}
m_c(t) &= c(t) + \frac{1}{\kappa(t)} JT(t) \;=\; c(t) + \frac{2\|\dot{c}(t)\|}{1-m} \cdot J \frac{\dot{c}(t)}{\|\dot{c}(t)\|} \\
&= \begin{pmatrix} mr\cos t + r\cos(mt) \\ mr\sin t - r\sin(mt) \end{pmatrix} - \frac{2}{m-1} \begin{pmatrix} -mr\cos t + mr\cos(mt) \\ -mr\sin t - mr\sin(mt) \end{pmatrix} \\
&= \frac{m+1}{m-1} \begin{pmatrix} mr\cos t - r\cos(mt) \\ mr\sin t + r\sin(mt) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Zur Regularität: Offenbar hat die Hypozykloide zur Zeit $t = 0$ eine Spitze; der Punkt p liegt dann auf dem großen Kreis. Nach Konstruktion wiederholt sich dieser Zustand zum nächsten Mal, wenn der kleine Kreis einmal abgerollt ist, also zum Zeitpunkt $t = 2\pi\frac{r}{R}$. Denn der Mittelpunkt des kleinen Kreises benötigt für einen Umlauf die Zeit 2π, und der kleine Kreis dreht sich um den Faktor $\frac{R}{r}$ schneller. Folglich ist die Hypozykloide regulär auf $\mathbb{R}\setminus\{k\cdot 2\pi\frac{r}{R} \mid k \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{R} \setminus \{k \cdot \frac{2\pi}{m+1} \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Zu Aufgabe 2

Zu (i) Die Seiten des Dreiecks $\triangle ABC$ seien mit a, b, c bezeichnet. Da alle Winkel gegeben sind, erhält man aus dem Winkel-Kosinus-Satz

$$\cos a = \cos b = \cos c = \frac{\cos\frac{3}{4}\pi + \cos^2\frac{3}{4}\pi}{\sin^2\frac{4}{3}\pi} = 1 - \sqrt{2}$$

und somit:

$$a = b = c = \arccos(1 - \sqrt{2})$$

Wir wählen $A = (0, 0, 1)$. Der Punkt B liege in der x-z-Ebene. Also können wir ansetzen $B = (\sin a, 0, \cos a)$, da auf der Einheitssphäre der Bogen von A nach B dem Winkel zwischen den Ortsvektoren entspricht. Der Bogen wiederum entspricht der Seitenlänge a des Dreiecks. Nun ist

$$\sin a = \sqrt{1 - \cos^2 a} = \sqrt{1 - (1 - \sqrt{2})^2} = \sqrt{2\sqrt{2} - 2}$$

und somit $B = (\sqrt{2\sqrt{2}-2}\,, 0\,, 1 - \sqrt{2})$. Um den Punkt C zu bestimmen, drehen wir den Bogen zwischen A und B um $\frac{3}{4}\pi$ um die z-Achse. Es ist $\sin\frac{3}{4}\pi = \frac{\sqrt{2}}{2}$ und $\cos\frac{3}{4}\pi = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Damit ergibt sich:

$$C = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2\sqrt{2}-2}\,,\, \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2\sqrt{2}-2}\,,\, 1 - \sqrt{2}\right) = \left(-\sqrt{\sqrt{2}-1}\,,\, \sqrt{\sqrt{2}-1}\,,\, 1 - \sqrt{2}\right)$$

Zu (ii) Es ist $p \in \mathbb{H}^2 \iff \langle\!\langle p, p\rangle\!\rangle = -1$. Damit ergibt sich $p_3 = \sqrt{3}$ und analog $q_3 = \sqrt{6}$. Für die Geodätische c durch p und q machen wir gemäß Aufgabe 11.3 (ii) den folgenden Ansatz:

$$c(t) = \cosh(t)p + \sinh(t)v \qquad \text{mit} \qquad v \in T_p\mathbb{H}^2\,,\ \langle\!\langle v, v\rangle\!\rangle = 1$$

Da sich c ergibt als $\operatorname{span}(p, q) \cap \mathbb{H}^2$, muss dabei v von der Form $v = \alpha p + \beta q$ sein, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Wegen $v \in T_p\mathbb{H}^2$ erhalten wir zunächst

$$0 = \langle\!\langle v, p\rangle\!\rangle = \langle\!\langle \alpha p + \beta q, p\rangle\!\rangle = \alpha\langle\!\langle p, p\rangle\!\rangle + \beta\langle\!\langle q, p\rangle\!\rangle = -\alpha + (1 - 3\sqrt{2})\beta$$

und damit

$$\alpha = (1 - 3\sqrt{2})\beta \qquad \text{und} \qquad v = (1 - 3\sqrt{2})\beta p + \beta q.$$

Weiter ergibt sich:

$$\begin{aligned}
1 &= \langle\!\langle v, v\rangle\!\rangle \\
&= (1-3\sqrt{2})^2\beta^2\langle\!\langle p, p\rangle\!\rangle + 2(1-3\sqrt{2})\beta^2\langle\!\langle p, q\rangle\!\rangle + \beta^2\langle\!\langle q, q\rangle\!\rangle \\
&= -(1-3\sqrt{2})^2\beta^2 + 2(1-3\sqrt{2})^2\beta^2 - \beta^2 \;=\; \beta^2 - 6\sqrt{2}\beta^2 + 18\beta^2 - \beta^2 \\
&= (18-6\sqrt{2})\beta^2
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich:

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{18-6\sqrt{2}}} \qquad \text{und} \qquad v = \frac{1-3\sqrt{2}}{\sqrt{18-6\sqrt{2}}}\,p + \frac{1}{\sqrt{18-6\sqrt{2}}}\,q$$

Zu Aufgabe 3

Da $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ist, gilt nach dem hyperbolischen Pythagoras:

$$\cosh a = \cosh b \cosh c \qquad \text{bzw.} \qquad \cosh b = \frac{\cosh a}{\cosh c} \quad (*)$$

Außerdem benutzen wir den Seiten-Kosinus-Satz und erhalten:

$$\begin{aligned}
\sinh a \sinh c \cos\beta &= \cosh a \cosh c - \cosh b \\
&\overset{(*)}{=} \cosh a \cosh c - \frac{\cosh a}{\cosh c} \\
&= \frac{\cosh a(\cosh^2 c - 1)}{\cosh c} = \frac{\cosh a \sinh^2 c}{\cosh c}
\end{aligned}$$

Daraus folgt nun:

$$\cos\beta = \frac{\cosh a \sinh c}{\cosh c \sinh a} = \frac{\tanh c}{\tanh a}$$

Die Rollen von b, c und β, γ können vertauscht werden und ergeben analog:

$$\cos\gamma = \frac{\tanh b}{\tanh a}$$

Zu Aufgabe 4

Zu (i) Es sei $f\colon M \to N$ eine injektive Immersion und M kompakt. Weiter sei $U \subseteq M$ offen. Dann ist $A := M \setminus U$ als abgeschlossene Menge eines Kompaktums kompakt. Da dann auch $f(A) \subseteq N$ kompakt und insbesondere abgeschlossen ist, ist $f(U) = f(M)\setminus f(A)$ offen in $f(M)$. Also ist die Umkehrfunktion von f stetig, denn das Urbild von U unter f^{-1} ist $f(U)$. Somit ist f ein Homöomorphismus aufs Bild und folglich eine Einbettung.

Das folgende Beispiel zeigt, dass die Kompaktheit von M notwendig ist: Die Menge $M := \mathbb{R} \times \{0\} \cup (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \{1\}$ ist eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$. Die Abbildung $f\colon M \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x, 0) = (x, 0)$ und $f(y, 1) = (0, y)$ für $x \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ ist eine injektive Immersion aber keine Einbettung.

Zu (ii) Trivialerweise sind Diffeomorphismen surjektive Einbettungen. Ist nun $f\colon M \to N$ eine surjektive Einbettung, so ist $F(M)$ eine m-dimensionale Untermannigfaltigkeit von N. Wegen $F(M) = N$ folgt $\dim(M) = \dim(N)$. Nach dem Umkehrsatz ist f ein lokaler Diffeomorphismus. Da f jedoch bijektiv ist, also f^{-1} global definiert ist, ist auch f^{-1} differenzierbar.

Zu Aufgabe 5

Dies ist eine einfache Rechnung. Es seien X_1, X_2, Y_1, Y_2 Vektorfelder auf M sowie $f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ und $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
(f_1\nabla^1 + f_2\nabla^2)_{fX_1+gX_2}Y &= f_1\nabla^1_{fX_1+gX_2}Y + f_2\nabla^2_{fX_1+gX_2}Y \\
&= f_1(f\nabla^1_{X_1}Y + g\nabla^1_{X_2}Y) + f_2(f\nabla^2_{X_1}Y + g\nabla^2_{X_2}Y) \\
&= ff_1\nabla^1_{X_1}Y + ff_2\nabla^2_{X_1}Y + gf_1\nabla^1_{X_2}Y + gf_2\nabla^2_{X_2}Y \\
&= f(f_1\nabla^1 + f_2\nabla^2)_{X_1}Y + g(f_1\nabla^1 + f_2\nabla^2)_{X_2}Y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(f_1\nabla^1 + f_2\nabla^2)_X(\lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2) &= f_1\nabla^1_X(\lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2) + f_2\nabla^2_X(\lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2) \\
&= f_1\lambda_1\nabla^1_X Y_1 + f_1\lambda_2\nabla^1_X Y_2 + f_2\lambda_1\nabla^2_X Y_1 + f_2\lambda_2\nabla^2_X Y_2 \\
&= \lambda_1(f_1\nabla^1 + f_2\nabla^2)_X Y_1 + \lambda_2(f_1\nabla^1 + f_2\nabla^2)_X Y_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(f_1\nabla^1 + f_2\nabla^2)_X(fY) &= f_1\nabla^1_X(fY) + f_2\nabla^2_X(fY) \\
&= f_1(Xf \cdot Y + f \cdot \nabla^1_X Y) + f_2(Xf \cdot Y + f \cdot \nabla^2_X Y) \\
&= \underbrace{(f_1 + f_2)}_{=1}(Xf \cdot Y) + f(f_1\nabla^1_X Y + f_2\nabla^2_X Y) \\
&= Xf \cdot Y + f(f_1\nabla^1 + f_2\nabla^2)_X Y
\end{aligned}$$

Zu Aufgabe 6

Zu (i) Wir betrachten N als immergierte Untermannigfaltigkeit durch die Inklusion $\iota\colon N \to M$. Nun zeigen wir, dass N genau dann totalgeodätisch ist, wenn die 2. Fundamentalform verschwindet.

Wir zeigen dies lokal an einem Punkt $p \in N$. Es sei γ eine Geodätische in N mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma'(0) = x$. Weiter sei v ein Vektor an p, der senkrecht auf N steht und V eine lokale Erweiterung von v zu einem Vektorfeld senkrecht zu N. Ebenso sei X eine lokale Erweiterung von x tangential an N. Wegen $g(X, N) = 0$ ergibt sich:

$$\alpha_v(x,x) = g(A_v x, x) = -g(\bar{\nabla}_X V, X) = -Xg(V,X) + g(V, \bar{\nabla}_X X) = g(V, \bar{\nabla}_X X)$$

Damit verschwindet $\alpha_v(x,x)$ genau dann, wenn $\bar{\nabla}_X X$ keine Normalkomponente hat. Dies geschieht wiederum genau dann, wenn γ auch Geodätische in M ist.

Mit dieser Vorüberlegung folgt die Beziehung zwischen ∇ und $\bar{\nabla}$ nun unmittelbar. Die Beziehung zwischen den Krümmungstensoren folgt sofort aus den Gauß-Gleichungen.

Zu (ii) Es ist klar, dass ein isometrischer Diffeomorphismus Geodätische auf Geodätische abbildet. Damit folgt die Gleichung unmittelbar.

Zu (iii) Wir setzen $N := \mathrm{Fix}(\iota)$. Ist N einpunktig bzw. diskret, so ist nichts zu zeigen. Im anderen Fall nehmen wir ohne Einschränkung an, dass N zusammenhängend ist. Weiter sei $p \in N$ und U eine Umgebung von p in M klein genug, dass zwischen je zwei Punkten in U eine eindeutige Verbindungsgeodätische existiert. Nun sei $q \in N \cap U$. Die Geodätische c in M, die p und q verbindet, wird durch ι auf eine Geodätische abgebildet, die ebenfalls p und q verbindet. Also gilt $\iota(c) = c$. Dies zeigt einerseits, dass T_pN wohldefiniert ist und somit N eine Untermannigfaltigkeit ist. Andererseits verläuft c in N und somit ist N totalgeodätisch.

Zu Aufgabe 7

Es bezeichne $i(p)$ den maximalen Radius des offenen Balles um p, auf dem $\exp_p$ ein Diffeomorphismus ist. Wir zeigen, dass für jedes p eine Umgebung U existiert und ein $\delta > 0$ derart, dass $i(q) \geq \delta$ gilt für alle $q \in U$.

Wegen der lokalen Aussage können wir ohne Einschränkung annehmen, dass M eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ mit Riemannscher Metrik g ist. Wir können weiter annehmen, dass es eine Nullumgebung $V \subseteq \mathbb{R}^n$ gibt, die im Definitionsbereich von $\exp_q$ für alle $q \in M$ liegt – dies folgt aus der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen. Wir betrachten die folgende Abbildung:

$$F\colon M \times V \to M \times M\ ,\ F(q,v) = (q, \exp_q(v))$$

Es ist $DF_{(p,0)} = (D_1F_{(p,0)}, D_2F_{(p,0)}) = \left(\begin{smallmatrix} I & 0 \\ I & I \end{smallmatrix}\right)$, denn für Kurven $p(t)$ in M und $v(t)$ in V mit $p(0) = p$ und $v(0) = 0$ gilt

$$D_2F_{(p,0)}v'(0) = (0, (D\exp_p)_0(v'(0))) = (0, v'(0))$$

und

$$D_1F_{(p,0)}(p'(0)) = \frac{d}{dt}(p(t), p(t))\Big|_{t=0} = (p'(0), p'(0)).$$

Mit dem Satz über die lokale Umkehrbarkeit folgt, dass eine Umgebung W von $(q,0)$ in $M \times V$ derart existiert, dass $F|_W$ ein Diffeomorphismus aufs Bild ist. Ohne Einschränkung kann W von der Form $W = U \times V_1$ angenommen werden mit offenen Umgebungen $U \subseteq M$ von p und $V_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ von 0 mit $B_\delta(0) \subseteq V_1$. Dann ist $\exp_q|_{B_\delta(0)}$ ein Diffeomorphismus für alle $q \in U$.

Nun zur Aufgabe: Wir wählen für jeden Punkt $p \in M$ ein U_p und δ_p wie oben angegeben. Die Mengen U_p überdecken M, und da M kompakt ist, lässt sich eine endliche Teilüberdeckung auswählen. Die zugehörigen δ-Werte sind ebenfalls endlich viele, und ihr Minimum kann als ε gewählt werden.

Zu Aufgabe 8

Vorbemerkung: Zu jedem $p \in M$ gibt es eine Umgebung, auf der $\exp_p$ ein Diffeomorphismus ist. Solch eine Umgebung nennt man *normal.* Man kann zeigen, dass ebenso eine Umgebung U von p existiert, die normal für alle Punkte $q \in U$ ist. Es folgt, dass innerhalb von U sich zwei beliebige Punkte durch eine eindeutige kürzeste Kurve (die Geodätische ist) verbinden lassen.

Bemerkung zur Aufgabenstellung: Die Aufgabe ist nur dann korrekt, wenn c_1, c_2 mit gleicher Geschwindigkeit parametrisiert sind, etwa nach Bogenlänge. Dies war stillschweigend vorausgesetzt.

Nun zur Aufgabe: Es sei $r > a$ gegeben. Wir betrachten die folgende Kurve:

$$c_3\colon [0,r] \to M\ ,\ t \mapsto \begin{cases} c_1(t) & : t \in [0,a] \\ c_2(t) & : t \in (a,r] \end{cases}$$

Wegen der Eindeutigkeit von Geodätischen ist klar, dass c_3 keine Geodätische sein kann. Genauer ist c_3 eingeschränkt auf jede beliebige Umgebung von $c_3(a)$ keine Geodätische. Nehmen wir nun an, $c_2|_{[0,r]}$ wäre Kürzeste. Insbesondere ist $c_2|_{[0,a]}$ Kürzeste und damit (siehe Bemerkung) auch $c_1|_{[0,a]}$. Damit ist auch c_3 eine kürzeste Kurve zwischen $c_3(0)$ und $c_3(r)$. Wählt man nun eine Umgebung U von $c_3(a)$ wie in der Vorbemerkung und wählt Punkte $p \in U \cap c_3((0,a))$ und $q \in U \cap c_3((a,r))$, so lassen sich p und q durch eine eindeutige kürzeste Kurve verbinden, die Geodätische ist. Also ist diese kürzer als c_3 zwischen p und q, im Widerspruch dazu, dass $c_3|_{[0,r]}$ Kürzeste ist.

Zu Aufgabe 9

Wir nehmen an, N_1 und N_2 schneiden sich nicht. Da beide kompakt sind, wird der Riemannsche Abstand $d_{\text{Riem}}(N_1, N_2) = \inf\{d_{\text{Riem}}(x,y) \mid x \in N_1, y \in N_2\}$ zwischen N_1 und N_2 von (mindestens) einer Geodätischen angenommen. Es sei etwa $\gamma\colon [0,1] \to M$ eine solche Geodätische mit $\gamma(0) = p \in N_1$ und $\gamma(1) = q \in N_2$. Dann gilt $\gamma \perp T_pN_1$ und $\gamma \perp T_qN_2$, da sonst kürzere Verbindungen zwischen N_1 und N_2 existieren würden – dies sieht man an der 1. Variationsformel. Nun verschieben wir T_pN_1 längs γ parallel und erhalten am Punkte q einen Untervektorraum $T_1 \subseteq T_qM$, der ebenfalls senkrecht auf γ steht. Damit ist $\dim(T_1 + T_qN_2) \le n-1$ und folglich

$$\dim(T_1 \cap T_qN_2) \ge n_1 + n_2 - (n-1) \ge 1.$$

Also existiert in T_qN_2 ein Vektor $X(1) \neq 0$, der parallel zu einem Vektor $X(0) \in T_pN_1$ ist. Das parallele Vektorfeld dazu sei $X(t)$. Wir definieren die folgende Variation von γ:

$$\gamma_s(t) := \exp_{\gamma(t)}(sX(t))$$

Da N_1, N_2 totalgeodätisch sind, liegen die Endpunkte aller Kurven der Variation jeweils wieder in N_1 bzw. N_2. Da γ eine Geodätische ist, ist die 1. Variation Null. Für die 2. Variation besagt das Korollar zur 2. Variationsformel aus der Vorlesung, dass (wegen der positiven Schnittkrümmung)

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2} L(\gamma_s)\Big|_{s=0} < 0$$

gilt. Somit sind Nachbarkurven von γ unter der Variation kürzer als γ. Dies widerspricht der Wahl von γ.

Zu Aufgabe 10

Zu (i) Es ist

$$f(t) = \|J(t)\| = g(J(t), J(t))^{\frac{1}{2}}$$

und damit ergibt sich:

$$f'(t) = \frac{1}{2} g(J(t), J(t))^{-\frac{1}{2}} \cdot 2g(J'(t), J(t)) = \frac{g(J'(t), J(t))}{f(t)}$$

$$\begin{aligned} f''(t) &= -\frac{f'(t)}{(f(t))^2} g(J'(t), J(t)) + \frac{1}{f(t)}\big(g(J''(t), J(t)) + g(J'(t), J'(t))\big) \\ &= \frac{-g(J'(t), J(t))^2 + (f(t))^2\big(g(J''(t), J(t)) + g(J'(t), J'(t))\big)}{(f(t))^3} \end{aligned}$$

Der Nenner des letzten Ausdrucks ist stets nichtnegativ. Weiterhin gilt wegen der Krümmungsbedingung:

$$g(J''(t), J(t)) = -g(R(J(t), \dot{c}(t))\dot{c}(t), J(t)) = -K \geq 0$$

Außerdem ergibt sich aufgrund der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$(f(t))^2 g(J'(t), J'(t)) = g(J(t), J(t)) g(J'(t), J'(t)) \geq g(J'(t), J(t))^2$$

und somit ist

$$-g(J'(t), J(t))^2 + (f(t))^2\big(g(J''(t), J(t)) + g(J'(t), J'(t))\big) \geq 0$$

und damit auch $f''(t) \geq 0$ für alle t. Also ist f eine konvexe Funktion.
Das zweite Ergebnis erhalten wir durch folgende Rechnung:

$$f'(0) = \lim_{t \to 0} f'(t) = \lim_{t \to 0} \frac{g(J'(t), J(t))}{f(t)} \overset{(*)}{=} \frac{\lim_{t \to 0}\big(g(J''(t), J(t)) + g(J'(t), J'(t))\big)}{\lim_{t \to 0} f'(t)}$$

Hierbei wurde bei $(*)$ L'Hospital angewandt. Damit folgt

$$(f'(0))^2 = g(J''(0), J(0)) + g(J'(0), J'(0)) = 0 + \|J'(0)\|^2$$

und da $f(0) = 0$ ist und f nichtnegativ und konvex, gilt $f'(t) \geq 0$ für alle t. Somit ergibt sich wie gewünscht $f'(0) = \|J'(0)\|$.

Zu (ii) Wiederum weil f nichtnegativ und konvex ist, gilt $f(1) \geq f(0)$ und daher $f(1) \geq \|J'(0)\|$.
Ein Satz der Vorlesung über Jacobi-Felder besagt:

$$\exp_{p*u} v = J(1)$$

wobei $J(t)$ ein Jacobifeld längs der Geodätischen $c(t) = \exp(tu)$ ist mit $J(0) = 0$ und $J'(0) = v$. Setzen wir nun wieder $f(t) = \|J(t)\|$ und wenden die obigen Ergebnisse an, so folgt direkt:

$$\|\exp_{p*u} v\| = \|J(1)\| = f(1) \geq \|J'(0)\| = \|v\|$$